ЮБИЛЕЙНА НАУЧНА СЕСИЯ – 30 години ФМИ,
ПУ “Паисий Хилендарски”, Пловдив, 3-4.11.2000

ПОСТРОЯВАНЕ НА ЪГЪЛ МЕЖДУ ПРАВА И РАВНИНА И ДВУСТЕНЕН ЪГЪЛ

Гинка Стоянова Бизова, Димитрия Пантелеева Родопска

Понятията ортогонална проекция на точка в равнина и раз-стояние от точка до равнина са стереометрични понятия, участващи в определенията на много други пнятия и твърдения.В статията се предлага методика за усвояване на тези понятия и приложението им за построяване и пресмятане на ъгъл между права и равнина и двустенен ъгъл.

Понятията ортогонална проекция на точка в равнина и раз-стояние от точка до равнина са стереометрични понятия, учас-тващи в определенията на много други понятия и твърдения.В статията се предлага методика за усвояване на тези понятия и приложението им за построяване и пресмятане на ъгъл между права и равнина и двустенен ъгъл.

Темата “Перпендикулярност” заема важно място в обучението по математика и в подготовката за конкурсните изпити за постъпване във ВУЗ.
Да разгледаме следните определения:

О1: Ортогонална проекция на точка в равнина, неминаваща през нея, се нарича прободът на единствената права през точката, която е перпендикулярна на равнината, с равнината(черт.1).

О2: Разстояние от точка до равнина се нарича разстоянието от точката до ортогоналната й проекция в равнината(черт.2).

О3: Ъгъл определен от неперпендикулярни права и равнина се нарича ъгълът, определен от правата и ортогоналната й проекция в равнината(черт.3).

О4: Разстояние между кръстосани прави се нарича разстоя-нието от произволна точка от едната права до равнина,минаваща през другта права и успоредна на първата права(черт.4).

При внимателното прочитане на определенията се разбира и от чертежите се вижда, че понятията ортогонална проекция на точка в равнина и разстояние от точка до равнина са основни и важни стереометрични понятия.

В тази статия ще разгледаме: различни начини за построяване ортогонална проекция на точка в равнина и за пресмятане на разстояние от точка до равнина, няколко начина за построяване на линеен ъгъл на двустенен ъгъл, както и методика за усвояването им.

Отначало ще разгледаме начини за построяване ортогонална проекция на точка в равнина.

I начин: Ако през точката минава права, която е перпенди-кулярна на равнината, то прободът им е търсената проекция (черт1).

II начин: Ако през точката минава равнина, която е перпен-дикулярна на проекционната, то проекцията лежи на пресечницата им, а за построяването й се прилага :

Теорема 1: Ако две равнини са перпендикулярни, то всяка права, която лежи в едната от тях и е перпендикулярна на пресечницата им е перпендикулярна на другата равнина.

От Т1 следва Алгоритъм за построяване на ортогонална проекция на точка в равнина:

През точката се избира подходяща равнина, перпендикулярна на дадената.
Построява се пресечницата на двете равнини .
В избраната равнина, през точката се построява права, перпендикулярна на пресечницата .
Пресечната точка на правите е търсената проекция.

Точка А и равнина β от черт.5 са дадените, а α е перпен-дикулярната равнина, която се избира.

III начин: Ако през точката минават две равнини, перпенди-кулярни на проекционната, за построяване на проекцията се прилага:

Теорема 2: Ако две пресичащи се равнини са перпендикулярни на трета равнина, то и пресечницата им е перпендикулярна на нея.

Задачата се свежда до построявне пробод на права(пресечни-цата) с равнина (проекционната).

IV начин: Ако точката е връх на пирамида, с основа лежаща в равнината и от условието на задачата е известно къде се проектира върхът на пирамидата в основата й, то известна е и проекцията на точката в равнината.

Ако е възможно да се определи точното място на ортого-налната проекция на точка в равнина, може да се пресметне и разстоянието от точката до равнината, но това понякога е трудно или невъзможно с изброените до тук начини.

О5: Височина на пирамида се нарича разстоянието от върха й до ортогоналната му проекция в основата й.

От О2 и О5 следва, че задачата за прасмятане разстояние от точка до равнина може да се преформулира в задача за намиране височина на пирамида с връх точката и основа лежаща в равнината. За целта се избира подходяща триъгълна пирамида и се изразява по два начина обемът й.

В учебниците по математика [1] и [2] са дадени следните определения:

О6 [1] Ъгъл, върхът на който лежи на ръба на двустенен ъгъл, а раменете му са съответно от стените на двустенния ъгъл и са перпендикулярни на ръба му, се нарича линеен ъгъл на двустенен ъгъл.

О7[2]: Ъгъл получен при пресичането на двустенен ъгъл с равнина перпендикулярна на ръба му, се нарича линеен ъгъл на двустенен ъгъл.

Ще разгледаме още два начина за построяване на линеен ъгъл.

Задача{1}: Ако през точка от едната стена на двустенен ъгъл са построени перпендикулри към другата стена и към ръба му, то полученат от тях равнина пресича двустенния ъгъл в негов линеен ъгъл.

Доказателство: Нека AA_1 и АО(черт.6) са перпендикуляри към β и s.От теоремата за трите перпендикуляра следва,чеA_1O също е перпендикулярна на s. От О6 следва, че $\angle(\alpha,\beta)=\angle AOA_1$.

Задача{1} ни дава Алгоритъм за построяване на линеен ъгъл

1. Определя се ръбът на двустенния ъгъл.
2. Избира се точка от едната стена, чиято проекция или разсто-яние до другата стена може съответно да се построи или прес-метне.
3. Построява се проекцията на точката в другата стена.
4. Построява се проекцията на точкта върху ръба.
5. Ъгълът, с връх получената точка върху ръба и рамене съот-ветно минаващи през избраната точка и проекцията й в стената е търсеният линеен ъгъл.

Задача{2}: Ако през точка от еднат стена на двустенен ъгъл е построен перпендикуляр към другата стена и от петата му е спуснат перпендикуляр към ръба, то равнината определена от тези перпендикуляри, пресича двустенния ъгъл в негов линеен ъгъл.

Доказателството е аналогично на Задача{1}.

Коя от Задачите за построяване на линеен ъгъл ще се прилага , зависи от това кой от перпендикулярите АО или A_1O (черт.6) е построим в зависимост от данните за стените α и β.

Ако построяването на линеен ъгъл с прилагане на О6, О7, За-дача{1} или Задача{2} е трудно или невъзможно, за пресмятането му се използва известната формула :

$S_{\text{проекц}}=S_{\text{ñå÷}}*\cos\varphi$, където φ е търсеният двустенен ъгъл.

Задачите, в които се иска да се построи, да се изчисли или е даден ъгъл между права и равнина или двустенен ъгъл се свеждат до решаване на превоъгълния ΔAOA_1(черт.3 и черт.6),където A_1 е ортогонална проекция на точка А в равниа β , дължината на отсеч-ката AA_1 е разстояние от точка А до равнина β. Вече разгледахме различни идеи за решаването на такива задачи, а сега ще ги прило-жим на практика,като дадем приоритет на построенията, а не на из-численията .

Задача 1: Даден е прав паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основа ромб ABCD със страна а и $\angle A=60°$ и околен ръб равен на h. Намерете : а) $\angle[BD_1,(ABCD)]$; á)$\angle[BD_1,(BCC_1B_1)]$; в) $\angle[BD_1,(ACC_1A_1)]$;

г)$\angle[BD_1,(A_1BC_1)]$;ä)$\angle[(BDC_1),(ABCD)]$.

Решение: а) По усллове $D_1D\perp(ABCD)$ (черт.7). Лесно се съобразява, че $\angle[BD_1,(ABCD)]=\angle DBD_1$.

б) $(A_1B_1C_1D_1)$ минава през D_1 и е перпендикулярна на (BCC_1B_1) (черт.7). Построяваме $D_1P\perp B_1C_1$. BP е проекцията на BD_1 в (BCC_1B_1). $\angle[BD_1,(BCC_1B_1)]= \angle D_1BP$.

в) BD_1 пробожда (ACC_1A_1) в средата M на оста OO_1 (черт.8). Проекцията на D_1 в (ACC_1A_1) е O_1. $\angle[BD_1,(ACC_1A_1)]=\angle[MD_1,(ACC_1A_1)]=\angle D_1MO_1$ и $tg\angle D_1MO_1=a/h$

г) I начин: D_1 лежи в (BDD_1B_1), която е перпендикулярна на (A_1BC_1) и се пресичат в BO_1 (черт.9). Построяваме $D_1P\perp BO_1$. $\angle D_1BP$ е търсеният. От $\Delta D_1O_1P \sim \Delta BO_1B_1$ се пресмята D_1P и $\sin\angle D_1BP$.

II начин: Нека P е ортогоналната проекция на D_1 в (A_1BC_1), без да знаем точното й място (четр.10). Търсеният ъгъл е $\angle D_1BP$. Отсечката D_1P е височина на пирамидата A_1BC_1D с връх D_1. От равенството на изразите за обема й $V=(S_{A1BC1}*D_1P):3$ и $V=(S_{A1C1D1}*BB_1):3$, намираме D_1P. От D_1B и D_1P се пресмята $\sin\angle D_1BP$.

д) DB е ръбът на двустенния ъгъл (черт.11) $CC_1\perp(ABCD)$ и $C_1O\perp BD$ (ΔBDC_1 е равнобедрен). От Задача {1} следва, че $\angle[(BDC_1),(ABCD)]=\angle COC_1$, за който се пресмята $tg\angle COC_1$.

Задача 2: Дадена е права триъгълна призма $ABCA_1B_1C_1$ с основа ΔABC с $\angle B=90°$, $AB=a$, $BC=CC_1=b$. Намерете : а)$\angle[(ABC_1), (A_1B_1C_1)]$; б)$\angle[(ABC_1),(ACC_1A_1)]$.

Решение: а) От ръба на търсения ъгъл е известна само т. C_1 (четр.12). (ABC_1) образува равни ъгли с успоредните равнини $(A_1B_1C_1)$ и (ABC). $\angle[(ABC_1), A_1B_1C_1)]$ $\angle[(ABC_1),(ABC)]$ $\angle CBC_1$, защото AB е ръбът , $CC_1\perp(ABC)$ и $CB \perp AB$ (Задача {2}).

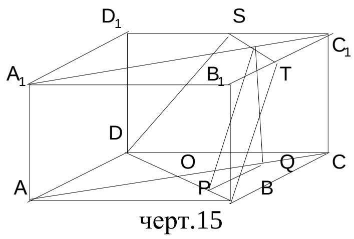
б) AC_1 е ръбът на двустенния ъгъл. Построяваме $CP\perp(ABC_1)$ и $CM \perp AC_1$. От Задача {1} Следва, че $\angle[(ABC_1),(ACC_1A_1)]=\angle CMP$. Лесно се пресмята CM. За пресмятане на CP ще използваме различни идеи:: Отсечката CP е височина на пирамидата ABC_1C , с връх C и основа ΔABC_1. Чрез изразяване по два начина обема на пирамидата се пресмята CP.

II начин: Да определим точното място на проекцията P. (BCC_1) минава през C и е перпендикулярна на (ABC_1), защото AB от (ABC_1) е перпендикулярна на BC и BC_1 от (BCC_1). P ще лежи на пресечни-цата им BC_1 и тъй като ΔBCC_1 е равнобедрен, то P е среда на BC_1. CP е медиана в $\Delta\ BCC_1$.

Задача 3: Даден е правоъгълен паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с измерения $AB=a$, $AD=b$, $AA_1=c$ $(a>b)$. Точка M от диагонала A_1C_1 е такава, че $A_1M:MC_1=3:1$. Намерете: а) $\angle[BD_1,(BCC_1B_1)]$; б)$\angle[(BDC_1),(ABCD)]$;c)$\angle[(BDM),(ABCD)$.

Решение: а) $D_1C_1\perp(BCC_1B_1)$, BC_1 е проекция на BD_1 в (BCC_1B_1) (черт.13). Търсеният ъгъл е $\angle D_1BC_1$.

б) DB е ръбът на двустенния ъгъл, а $C_1C \perp(ABCD)$. Построяваме $C_1Q\perp AB$ $(Q\neq O)$ (черт.14). От Задача {2} следва, че$\angle[(DBC_1),(ABCD)]=\angle C_1QC$. От ΔBCD се пресмята CQ .



черт.15

в) Равнината (DBM) пресича призмата в нернобедрения трапец BDST (черт.15). M е подходяща точка за построяване и пресмятане на линейния $\angle MPM_1$, защото проекцията й M_1 в(ABCD) е средата на отсечката OC, а перпендикулярът M_1P към ръба BD е средна отсечка в ΔOQC катетът QC, на който е известен от б).

Задача 4: Четири от ръбовете на тетраедър ABCM имат дължина единица,а ръбът MC е перпендикулярен на (ABC). Намерете:а)$\angle[(ABM),(ABC)]$;б)$\angle[(ABM),(BCM)]$.

Решение: Лесно се съобразява,че AB=AC=BC=MC=1 . а) $MC\perp(ABC)$ (черт.16). Построяваме $CP\perp AB$ (P е среда на AB) . От Задача{2} следва, че $\angle MPC$ е търсеният .

б) Ръбът на двустенния ъгъл е BM(черт.17). Построяваме $CO\perp(ABM)$ и $CP\perp BM$. От Задача{1} следва, че $\angle[(ABM),(BCM)]=\angle OPC$.

I начин: Ще пресметнем $\sin\angle OPC$.PC е височина в ΔBCM,а CO е височина на пирамидата ABCM и може да се намери ,чрез пресмятане на обема й.

II íà÷èí: Äà íàìåðèì îòñå÷êèòå PC,PO è$\cos\angle OPC$.PC å èçâåñòíà Îò ðàâåíñòâîòî íà ðúáîâåòå CA=CB=CM=1 следва, че върхът C се проектира в центъра O на описаната около ΔABM окръжност, а OM е нейният радиус. От ΔPOM се намира PO.

Çàäà÷à 5: Äàäåíà å ïðàâà òðèúãúëíà ïðèçìà $ABCA_1B_1C_1$ ñ ðúáîâå $AB=4\sqrt{6}$, AC=6,BC=8. Ïðåç C å ïîñòðîåíà ðàâíèíà ,êîÿòî ïðåñè÷à ïðèçìàòà â ðàâíîñòðàíåí òðèúãúëíèê.Ïðåñìåòíåòå ëèöåòî íà ñå÷åíèåòî è úãúëà, êîéòî òî îáðàçóâà ñ îñíîâàòà ABC íà ïðèçìàòà.

Решение: Нека сечението е равностранния ΔMNC (черт.18). Означаваме AM=x, BN=y. От MC=NC=MN се съставя система,която има решение x=8, y=6. Тогава MC=10 è $S_{mnc}=25\sqrt{3}$. Ръбът на двустенния ъгъл е правата CQ, а $MA\perp(ABC)$. Построяваме $AP\perp CQ$. От Задача{2} следва, че$\angle APM$ е търсеният.Отсечката AM е намерена, но AP не се пресмята лесно. Построяването на ръбаCQ, на линейния ъгъл$\angle APM$ и намирането на отсечката AP се оказват излишни, ако се пресметне $\cos\angle APM=\cos\varphi$ по формулата $S_{ABC}=$ $=S_{MNC}*\cos\varphi$.S_{MNC} е намерено, а S_{ABC} се пресмята лесно.

Задача 6: Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ръб a. Ако$M\in AB$ è M å ñðåäà íà AB,$N\in BC$ è BN:NC=1:2 намерете ъгъла и разстоянието между правите A_1M и B_1N.

Решение: Построяваме $A_1N_1IIB_1N$ (черт.19).От определението за ъгъл между кръстосани прави следва, че $\angle(A_1M,B_1N)=\angle(A_1M,A_1N_1)=\angle MA_1N_1$. След пресмятане страните на триъгълник ΔA_1MN_1 се намира $\cos\angle MA_1N_1$. Построявме $B_1P\perp(A_1MN_1)$. От O4 следва, че $d(A_1M,B_1N)=d[B_1,(A_1MN_1)=B_1P$. За пресмятане на B_1P се използва обемът на пирамидата $B_1A_1MN_1$.

Çàäà÷è çà ñàìîñòîÿòåëíà ðàáîòà :

Всички ръбове на права призма$ABCDA_1B_1C_1D_1$ имат дължина a.Ъгъл BAD е 60°. Постройте сечението на призмата с равнина, минаваща през върха D, средата на ръба AB и центъра на стената BCC_1B_1.Пресметнете лицето на полученото сечение и ъглите, които то образува с основата ABCD и ръба BC.

В наклонена призма $ABCA_1B_1C_1$ основата ABC е равностранен триъгълник със страна a, а околната стенаACC_1A_1 е перпендикулярна на основата и ромб с по-голям диагонал$AC_1=b$. Намерете косинуса на двустенния ъгъл между стените ABC и CBB_1C_1.

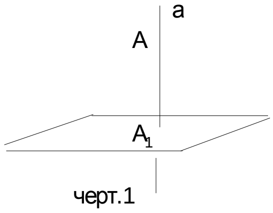
Основата на пирамидата MABCD е трапец с бедра AB=CD=a и основи AD=3a è BC=2a. Околният ръб MC=h е перпендикуля-   рен на основата. Постройте сечението на пирамидата с равнина,минаваща през върха C и успоредна на ръбовете AB и MD. Намерете ъглите,които сечението образува с основта ABCD и с ръба BC.

ЛИТЕРАТУРА

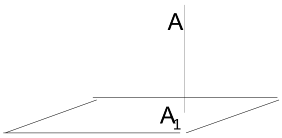
Ч.Лозанов, Т.Витанов, П.Недевски, Математика 10 клас, Анубис, София 1999г.

А.Лангов, Н.Райков, Л.Портев, Геометрия 10 клас, Просвета, София 1993г.

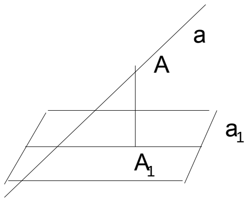
ПРИЛОЖЕНИЕ:



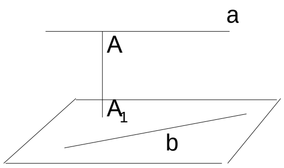
черт.1



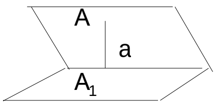
черт.2



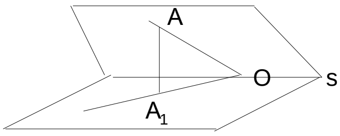
черт.3



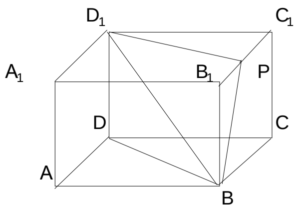
черт.4



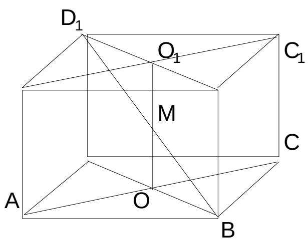
черт.5



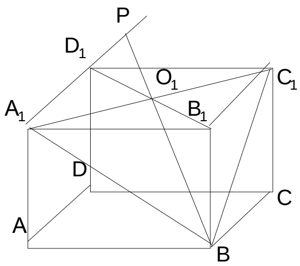
черт.6



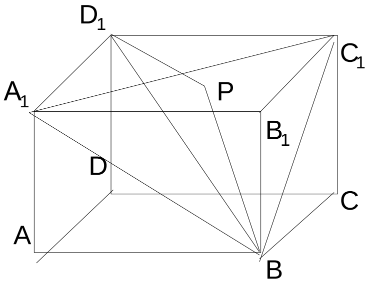
черт.7



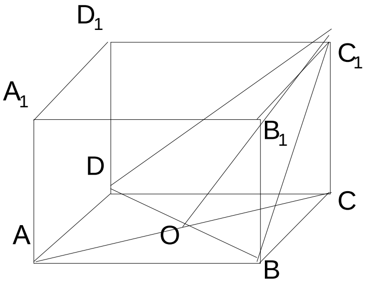
черт.8



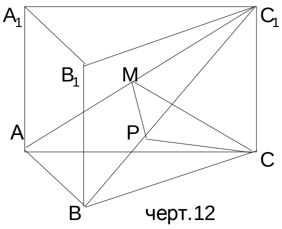
черт.9



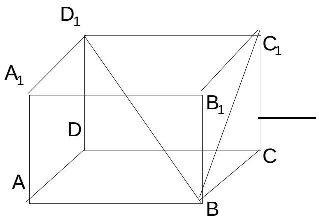
черт.10



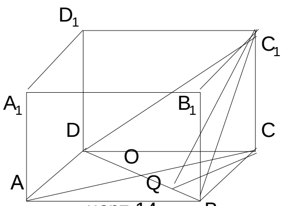
черт.11



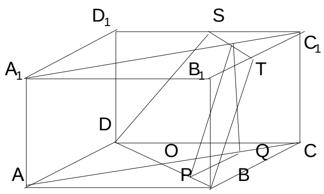
черт.12



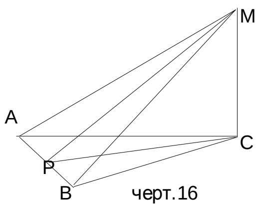
черт.13



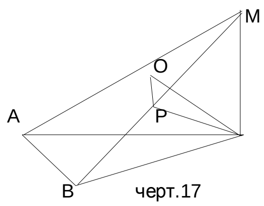
черт.14



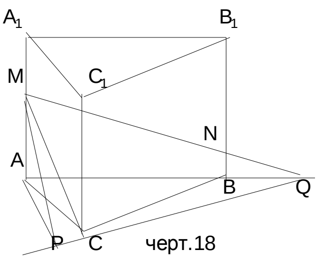
черт.15



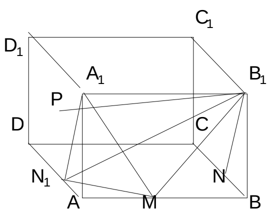
черт.16



черт.17



черт.18



черт.19