

ПРИЛОЖЕНИЕ НА ТЕОРЕМАТА НА МАРИОН ЗА ОПТИМИЗАЦИЯ НА РЕСУРСИТЕ В ИНТЕЛИГЕНТНОТО ПАСИЩНО ГОВЕДОВЪДСТВО

Тодорка Глушкова

Резюме. Настоящата работа има за цел да представи един теоретичен и приложен модел за управление на пасищни пространства, базиран на геометрични зависимости в равнината на триъгълника. В модела се използва едно обобщение на теоремата на Марион и свойствата на централния шестоъгълник, като е предложен алгоритъм за динамично зонирание. Основният фокус е върху ситуация, при който се позволява вписването на оптимална елипсовидна ограда в разгледания шестоъгълник. Моделът интегрира локацията чрез барицентрични координати и оптимизира баланса между пасищна площ, разходи за изграждане на електропастир и качеството на сигнала от LoRa базови станции.

Ключови думи: Теорема на Марион, интелигентно пасищно животновъдство

Въведение

В съвременната дигитална ера „интелигентното земеделие“ (Smart Farming) във все по-голяма степен разчита на математически модели за ефективно управление на ресурсите. Основните проблеми в пасищното говедовъдство са свързани с оптималното разпределение на стадата, което да гарантира устойчиво ползване на тревната покривка, минимални разходи за заграждане и възможности за непрекъснат мониторинг на животните [1].

Геометричният подход, базиран на забележителни точки и фигури в триъгълника, предлага подходящи решения за тези предизвикателства. Теоремата на Марион, установена през 1993 г. от Марион Уолтър, описва лицето на шестоъгълник, получен от пресичането на чевиани, които делят страните на триъгълника на три равни части [2].

В настоящия доклад разглеждаме приложението на някои нейни обобщения в контекста на автономното управление на пасища. Целта е да се създаде подходящ и математически обоснован алгоритъм за определяне на геометричното разположение на точките по страните на триъгълната област, което да осигури оптимално управление на пасището.

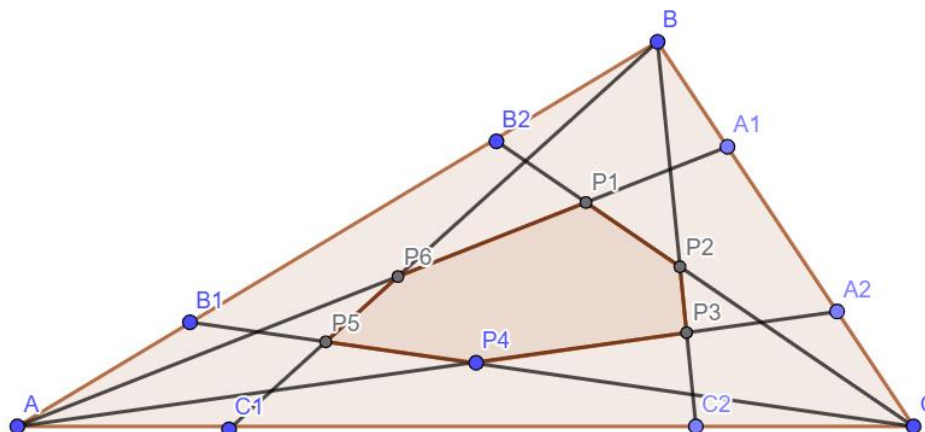
Постановка на проблема и свързани изследвания

Изграждането на система за интелигентно пасищно отглеждане на животни в отдалечени планински райони е предизвикателство, по което работят екипи от различни научни институции [3]. Трудностите са свързани както с местоположението и трудната достъпност до тези пасища, така и с необходимостта от изграждане на инфраструктура за свързаност и пренос на данните. Като едно от удачните решение за безжична комуникационна технология, предназначена за нискоскоростни предавания на данни с ниска енергийна консумация се налага технологията LoRa (Long Range) [4]. Изграждането и управлението на тази инфраструктура, преноса и обработката на данните, необходимостта от бърза и ефективна обратна връзка и реакция при спешни ситуации е свързано с високи и често нерентабилни разходи за фермерите. Всичко това поставя на преден план необходимостта от търсене и внедряване в практиката на подходящи оптимизационни модели и алгоритми.

Избраният модел използва някои приложения на теоремата на Марион, според която ако страните на триъгълника ABC се разделят на три равни части и се свържат съответните точки с върховете, полученият централен шестоъгълник има лице $1/10$ от общото лице S [5]. Обобщенията на тази теорема разширяват този принцип за разделяне на страните на k равни части. Гроздев, Ненков и Маджарова в [6] предлагат още по-широко обобщение, при което страните се делят в произволни съотношения чрез параметрите n и m . Техният модел използва барицентрични координати за дефиниране на върховете на шестоъгълника, което прави модела изключително подходящ за софтуерна имплементация в системи за GPS позициониране.

Нека за целите на изследването разгледаме следната реална ситуация, съдържаща труднодостъпно високопланинско пасище, на което се отглеждат крави. Всяка крава има нашийник с дигитално устройство, комбиниращо различни сензори – за местоположение, наклон на главата и тялото, температура и др. Тези нашийници изпращат данни на всеки 2 секунди. Комуникацията и преносът на данни е реализиран чрез LoRa станции [7]. Големите планински масиви или пасищни площи могат да бъдат организирани като мрежа от триъгълни клетки. Всеки триъгълник ABC в тази мрежа представлява отделна оперативна единица. Предавателните станции (LoRa или други) се разполагат точно във върховете A, B и C. Тези точки могат се дефинират чрез барицентрични координати като $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,1)$. Според разширението на Теоремата на Марион в [5] точките A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , C_1 , C_2 делят страните BC, CA, AB съгласно параметрите n и m . За нуждите на разработвания модел

приемаме $n=m$, което осигурява геометрична симетрия и по-добра практическа приложимост (Фиг. 1).



Фигура 1. Шестоъгълник по Теоремата на Марион при $m=n$

Тогава, ако лицето на целия триъгълник означим с S , лицето на получения шестоъгълник ще бъде:

$$S_1(n) = \frac{2n^3 - 10n^2 + 16n - 8}{(2n-1)(n^2-1)} \cdot S \quad (1)$$

Този израз позволява на системата автоматично да изчислява капацитета на зоната спрямо нуждите на броя животни в стадото, според стойността на n . Освен това в разгледания случай (при $m=n$), в шестоъгълника на Марион може да се впише елипса [8]. За практическото земеделие това означава, че можем да проектираме ограда (физическа или виртуална) с плавна, овална форма, което минимизира напрежението в ъглите и оптимизира движението на животните.

Предлагаме система, включваща локализация чрез барицентрични координати. Алгоритъмът за мониторинг проверява в реално време дали получените от сензорите координати на кравата попадат в зоната на шестоъгълника. Високата честота на данните позволява прецизен анализ на поведението. Качеството на сигнала е обратнопропорционално на разстоянието до станциите във върховете. Математическият модел показва, че с нарастване на n , точките на шестоъгълника се приближават към страните и върховете на триъгълника. Това гарантира, че при по-големи пасища (големи стойности на n), животните остават в обхват с висока мощност на сигнала, което увеличава времето на живот на батериите, захранващи сензорните устройства.

Оптимизационен модел

В реалните условия фермерът е изправен пред задачата да намери оптималната стойност на n , което да максимизира ползите и да минимизира

разходите. Това определя необходимостта да се осигури максимален размер на пасището, което да се обезопаси с ограда или електронен пастир, като се осигури възможно най-добър сигнал и дълъг живот на хранващите батерии в нашите пасища.

От математическа гледна точка оптималното местоположение на крава с максимален комуникационен сигнал е точката на Ферма - Торичели X и малка област около нея, където сборът от разстоянията до върховете на триъгълника $D = d(X, A) + d(X, B) + d(X, C)$ е най-малко. На това местоположение, обаче няма как да се събере цялото стадо. Освен това всяка комуникационна станция може да получава сигнали от различни сензори, което обосновава необходимостта кравата да се намира близо до всеки от трите върха на триъгълника, т.е. можем да изключим случаите, в които животното се намира в близост до който да е от върховете. Максималната пасищна площ при големи стойности на n , ще се доближи до лицето на целия триъгълник, но тогава разходите за ограда или електропастир ще бъдат неоправдано големи. Всичко това ни дава основания да търсим оптимум на целевата функция:

$$F(n) = w_1 \cdot \text{Area}(n) + w_2 \cdot \text{Signal}(n) - w_3 \cdot \text{Perimeter}(n) \quad (2)$$

Във (2) w_1 , w_2 и w_3 са параметри, определящи теглото на съответната функция, определяща площта на пасището $\text{Area}(n)$, силата на сигнала $\text{Signal}(n)$ и обиколката $\text{Perimeter}(n)$. Тези стойности са тегловни коефициенти, които се определят от конкретните приоритети и икономически условия на фермата:

- w_1 (Тегло на площта): Определя колко важна е максималната пасищна площ. Ако стадото е голямо и се нуждае от повече храна, w_1 ще бъде с висока стойност.
- w_2 (Тегло на сигнала): Определя важността на прецизното проследяване. Ако теренът е сложен и рискът от загуба на животни е голям, се задава по-високо w_2 .
- w_3 (Тегло на разходите): Отражава цената на материалите за електропастир. При ограничен бюджет или скъпи консумативи, w_3 ще има по-голяма тежест.

Обикновено сумата на теглата се приравнява на 1 ($w_1 + w_2 + w_3 = 1$). Например: ако бюджетът е приоритет: $w_1=0.2$, $w_2=0.2$, $w_3=0.6$; ако площта е приоритет: $w_1=0.7$, $w_2=0.2$, $w_3=0.1$.

Фермерът трябва да определи тези коефициенти, според конкретните условия, преди задаването на целевата функция. Нека да разгледаме значението на функциите за площ, обиколка и качество на сигнала по отделно:

- **Area(n):** Увеличава се с нарастване на n . При $n=3$, зоната е $1/10$ от пасището, докато при $n=5$ зоната е вече $1/3$ от него.
- **Signal(n):** Подобрява се с нарастване на n , тъй като зоната се разширява към станциите във върховете на триъгълника. Т.е. увеличението на стойността на n , увеличава стойностите на първите две функции.
- **Perimeter(n):** С увеличението на стойността на n , обаче, разходите за ограда (електропастир) нарастват. Изборът на елипсовидна форма, която е доказано възможна в разгледания случай (при $n=m$), минимизира тези разходи спрямо шестоъгълната форма.

При равни тегла на трите параметъра ($w_1 = w_2 = w_3 = 0.333$), целевата функция търси баланс, при който нито един от компонентите не доминира над останалите. За целите на изчисленията са приети следните допускания: пасището е равностраничен триъгълник със страна $a=1$ и лице S ; Area(n) е лицето на шестоъгълника $S1$ като част от S ; Signal(n) е изчислен като сума от разстоянията на шестте върха на шестоъгълника до базовите станции във върховете на триъгълника; Perimeter(n) е обиколката на шестоъгълника спрямо страната a . Обиколката на елипсата е по-малка от този периметър, но тъй като изграждането на елипсовидна ограда е по-трудоемко, ще оставим в модела функцията по този начин.

Тогава, получаваме следните стойности (Таблица 1) за целевата функция

$$F(n) = 0.333 * Area(n) + 0.333 * Signal(n) - 0.333 * Perimeter(n)$$

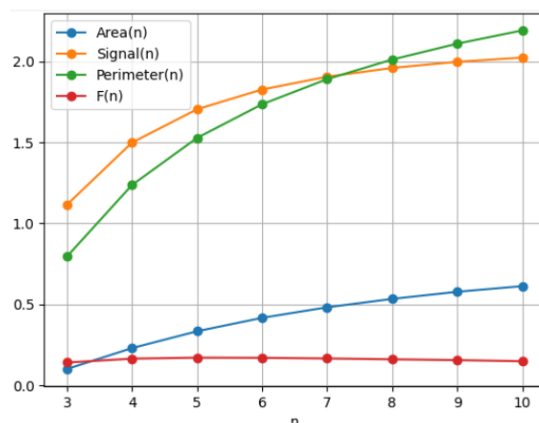
Таблица 1. Таблица на целевата функция $F(n)$ при равни тегла

n	Area(n) $S1/S$	Signal (n)	Perimeter(n)	$F(n)$
3	0.100	1.114	0.794	0.140
4	0.229	1.498	1.236	0.164
5	0.333	1.704	1.527	0.170
6	0.416	1.826	1.735	0.169
7	0.481	1.905	1.890	0.165
8	0.533	1.959	2.011	0.160
9	0.577	1.997	2.109	0.155
10	0.612	2.023	2.191	0.148

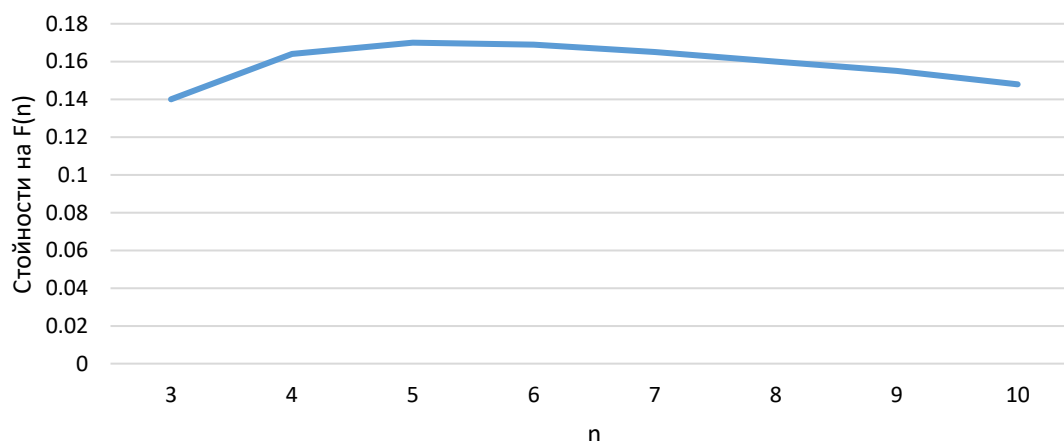
От фигура 1 ясно се вижда, че:

- Area(n) расте монотонно с увеличаване на n . При $n=10$ животните разполагат с над 61% от територията на триъгълника, докато при оригиналната теорема ($n=3$) тя е едва 10%;

- $\text{Signal}(n)$ и $\text{Perimeter}(n)$ също нарастват, но с намаляващ темп. Периметърът нараства почти линейно. Фермерът трябва да прецени дали увеличението на площта между $n=8$ и $n=10$ оправдава допълнителните разходи за ограда, тъй като там кривата на площта започва да се забавя;
- $F(n)$ има максимум около $n=5$, след което започва да намалява.



Стойности на целевата функция $F(n)$ при равни тегла



Фигура 1. Промяна на стойностите на целевата функция при равни тегла

Това показва, че оптимумът на целевата функция при равни тегла е приблизително при $n \approx 5$. Тази стойност се счита за „златната среда“, тъй като осигурява точно $1/3$ от площта при балансиран периметър и стабилен сигнал.

Анализ на резултатите и изводи

Въз основа на данните от Таблица 1 и графиките от Фигура 1 за максимална стойност на целевата функция $F(n)$ при равни тегла на параметрите, можем да направим следните изводи:

- Оптимум се получава при $n=5$: При равни тегла, функцията достига своя максимум именно при $n=5$ (стойност 0.170). Това е математическото потвърждение на хипотезата за „Златната среда“, където пасището заема точно $1/3$ от общата площ.
- Баланс между ползи и разходи: При $n=5$, прирастът в площта и качеството на сигнала (намаляващото разстояние до базовите станции във върховете) все още е по-голям от нарастването на разходите за ограда. След тази точка ($n>5$), периметърът започва да расте по-бързо от площта, което води до плавен спад в стойността на функцията.
- Ролята на симетрията ($n=m$): Доказано е, че само при $n=m$ в шестоъгълника на Марион може да се впише елипса. В случая на равни тегла, тази елипса осигурява оптимална пасищна площ с геометрично най-ефективната ограда.

Следователно за изграждането на интелигентно пасище, функциониращо при балансиран приоритет, най-ефективната конфигурация е разделянето на страните на 5 равни части ($n=5$).

Реализацията на алгоритъм за разработка на система за интелигентно пасище при този модел се основава на уникалното свойство на шестоъгълника на Марион да позволява вписването на елипса в този случай. Алгоритъмът следва следните стъпки:

Стъпка 1. Инициализация на системата

- Дефиниране на полето: Пасището се представя като триъгълник ABC с лице S , където базовите станции във върховете се задават с барицентрични координати $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,1)$.
- Задаване на параметъра n : Избира се параметър, който определя точките на делене на всяка страна на триъгълника.

Стъпка 2. Изчисляване на пасищната зона

- Изчисляване на площта: Системата автоматично изчислява лицето на централната зона S_1 чрез формула (1).
- Генериране на виртуалната ограда: Системата изчислява барицентричните координати на шестте върха на шестоъгълника на Марион.

Стъпка 3. Оптимизация на заграждението

- Вписване на елипса: При $m=n$, алгоритъмът активира модул за елипсовидна ограда, вписана в шестоъгълника. Това оптимизира разходите за електропастир, като минимизира периметъра спрямо заградената площ.

- Проверка на сигнала: Алгоритъмът оценява близостта на всеки от върховете на шестоъгълника до станциите във върховете.

Стъпка 4. Оперативен цикъл и мониторинг

- Локализация: Системата приема GPS/датчик данни от животните и ги конвертира в барицентрични координати (x,y,z) спрямо върховете A, B и C.
- Геофенсинг (Virtual Fencing): Извършва се математическа проверка дали координатите на животното попадат в рамките на изчисления шестоъгълник или елипса.
- Динамична адаптация: При нужда от промяна на пасищния ресурс, алгоритъмът променя само стойността на n , което автоматично преизчислява всички координати и площи.

Заклучение

Приложението на обобщената теорема на Марион превръща една абстрактна геометрична задача в мощен инструмент за управление на агробизнеса. Условието $n=m$ е фундаментално за постигане на симетрия и за използването на елипсовидни структури за заграждане. Интеграцията на този модел със съвременните LoRa технологии позволява пълна автоматизация на пасищния процес, гарантирайки благосъстояние на животните и икономическа ефективност за фермера. С цел намаляване на разходите за поставянето на електропастир и подобряване на оптимизацията на целевата функция, може да се помисли върху добавянето на сензори за вибрация в нашийниците, които да стимулират животните да не напускат зоната на определеното пасище.

Благодарности

Авторът изказват благодарност към научен проект ФП25-ФМИ-010 „Иновативни интердисциплинарни изследвания по информатика, математика и педагогика на обучението“ към НПД на ПУ, за частичното финансиране на настоящата работа.

Литература

- [1] R. Russias, R. Delagarde, K. Klumpp, A. Michaud, Clarifying grazing management methods: A data-driven review, *Sustainability*, 2025, 17 (11), 5200, <https://doi.org/10.3390/su17115200>

- [2] C. Kimberling (n.d.), *Encyclopedia of Triangle Centers (ETC)*, Department of Mathematics, University of Evansville. Retrieved March 4, 2026, from <https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>
- [3] S. Wolfert, L. Ge, C. Verdouw, M. Bogaardt, Big data in smart farming – a review, *Agricultural Systems*, 2017, 153, 69–80, <https://doi.org/10.1016/j.agsy.2017.01.023>
- [4] L. Schulthess, F. Longchamp, C. Vogt, M. Magno, A LoRa-based and maintenance-free cattle monitoring system for alpine pastures and remote locations, 2024, *arXiv*, <https://arxiv.org/abs/2406.06245>
- [5] Wolfram MathWorld. (n.d.), *Marion's Theorem*. Retrieved April 15, 2026, from <https://mathworld.wolfram.com/MarionsTheorem.html>
- [6] S. Grozdev, V. Nenkov, T. Madjarova, Another summary of Marion's theorem, *Proc. of the International Scientific Conference IMEA'2025*, Pamporovo, Bulgaria, 2025, pp. 53–58, ISBN: 978-619-7768-44-2
- [7] E. Valchev, P. Malinov, T. Glushkova, S. Stoyanov, Approach for modeling and implementation of an intelligent system for livestock cattle on pastures, *IFAC-PapersOnLine*, 2022, Vol. 55, Issue 32, 2022, 211–216, ISSN: 2405-8963, <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.11.141>
- [8] V. Nenkov, Marion's hexagons and ellipses, *Proc. of the Jubilee International Scientific Conference "Synergetics and Reflection in Mathematics Education"*, Pamporovo, Bulgaria, 2025, pp. 107–114, ISBN: 978-619-7768-41-1

Тодорка Глушкова

Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“

Факултет по математика и информатика

бул. „България“ № 236, 4027 Пловдив, България

Автор за кореспонденция: glushkova@uni-plovdiv.bg

APPLICATION OF MARION'S THEOREM FOR OPTIMIZATION OF RESOURCES IN INTELLIGENT PASTURE CATTLE FARMING

Todorka Glushkova

Abstract. The present work aims to present a theoretical and applied model for pasture management, based on geometric dependencies in the triangle plane. The model uses a generalization of Marion's theorem and the properties of the central hexagon, and a dynamic zoning algorithm is

proposed. The main focus is on a situation where an optimal elliptical fence is allowed to be inserted into the considered hexagon. The model integrates the location through barycentric coordinates and optimizes the balance between pasture area, costs for building an electric shepherd, and the signal quality from LoRa base stations.

Key Words: *Marion's Theorem, Intelligent Pasture Livestock Farming*