ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

ПУ "Паисий Хилендарски"

Боян Златанов, Самет Караибрямов, Бистра Царева

УЧЕБНО ПОМАГАЛО

за учебната дисциплина

СИНТЕТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

2011

УЧЕБНО ПОМАГАЛО ПО СИНТЕТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ[1]

Учебната дисциплина Синтетична геометрия съдържа две части: проективна геометрия и дескриптивна геометрия и се преподава на специалностите Математика, Математика и информатика (с хорариум 40 часа лекции и 40 часа упражнения), Физика и Математика (с хорариум 30 часа лекции и 30 часа упражнения). Лекциите следват учебника "Синтетична геометрия"с автор доц.д-р Бистра Царева.

Обучението завършва с изпит, като оценката се формира върху следните компоненти:
1. Решаване на задачи с ползване на учебника за справка върху теорията.
2. Доказване на теореми без да се използва литература за справка. Теоремите са селектирани в 4 групи в зависимост от трудността на доказателството им. Всеки студент сам избира групата теореми, върху която ще бъде изпитан в устна беседа от преподавателя, с което определя и диапазона на точките, които ще получи за тази част от изпита.
3. Курсова работа.
4. Присъствие и активност по време на занятията.

Последната глава на новото издание на учебника "Синтетична геометрия"(2010) съдържа задачи по проективна и дескриптивна геометрия, които са тематично подредени съобразно учебната програма и са достатъчни както за провеждане на упражненията, така и за самостоятелната работа на студентите, но липсват решения (както изисква системата на изпитване).
Настоящето учебно помагало е не само притурка към учебника по Синтетична геометрия, в която са дадени решения и упътвания на подбрани задачи, така че студентът да се учи и сам да се справя с решаването на задачите в тази учебна дисциплина. То осигурява прилагане на иновативни методи в обучението по геометрия.
Учебното помагало е конструирано в две части, всяка от които съдържа съответно задачи по проективна геометрия и задачи по дескриптивна геометрия.
Всяка част съдърха два раздела.
Първият раздел може да се принтира и ползва и на книжен носител.
Вторият раздел на първата част предлага динамични чертежи на избрани задачи по проективна геометрия и възможност да се създават динамични чертежи на други задачи като се използва авторската програма САМ. В същото време решенията могат и да се презентират последователно стъпка по стъпка. Замяната на листа и молива с компютър при изпълнение на чертежите, облекчава и осъвременява процеса на обучение.
Вторият раздел на втората част предлага интерактивно обучение по темата "Взаимно пресичане на призми и пирамиди в аксонометрия"

[1]Първите двама автори на учебното помагало са частично финансирани от Пловдивски университет „Паисий Хилендарски”, НПД проект NI11-FMI-004

с помощта на създадения от нас образователен софтуер САМ, написан на $C\sharp$ в среда на .NET framework 4.
Програмата позволява да се следва ръчното решение на задачите, като се ползва метода на спомагателните равнини. Достатъчно е да се въведат координатите на върховете на двата многостена и програмата предлага на ползвателя пълното решение на задачата във всяка от петте популярни аксонометрични проекции (кабинетна проекция, кавалиерна и военна перспективи, правоъгълни изометрия и диметрия). То включва финалния чертеж, списък на етапите на решението с кратък коментар на по-значимите от тях и последователност на всички стъпки в решението. Етапите в решението на всяка задача са: изобразяване на телата, построяване на върховата права и стъпките ѝ, последователно построяване на прободните точки на околните ръбове на всеки многостен с другия, развиване на прободната схема, корекция на видимостта на ръбовете, съобразена с взаимното пресичане на телата и на края скривайки всички спомагателни линии , композицията на двата пресичащи се многостена е представена в перспектива. Студентът може да избере най-подходящата проекция за конкретната задача и чрез бутона за презентация да проследи построенията във всеки етап с възможността да се движи в двете посоки на времето. За облекчение на ползвателя по време на презентацията всички построения, които не участват в текущия или следващи етапи са скрити. Позвателят е свободен да експериментира върху чертежа, манипулирайки всеки обект поотделно (да променя стил, цвят, размер) или да прилага върху целия чертеж ротация, транслация, свиване, разтягане, мащабиране, принтиране.
Програмата САМ и класификацията на прободните точки на околните ръбове, базирана на взаимното положение на спомагателните им равнини, са инструменти, чрез които преподавателите и студентите могат да съставят бързо и лесно не само стандартни задачи, но и по-интересни задачи, които липсват в известните сборници и учебни помагала. Ползвателят може да променя координати на някои върхове на многостените, за да получи импровизации върху дадена задача или да съставя изцяло нови задачи, включвайки цялото разнообразие на прободите, описано от нашата класификация. Най-добрите импровизации, предложени от студентите в курсовите им работи, ще бъдат включени във втория раздел на втората част на учебното помагало.
Новият подход в обучение по темата осигурява по-задълбоченото ѝ изучаване, стимулира творческата работа на студентите и същевременно максимално облекчава условията на всеки негов етап - подготовка на преподавателя; преподаване и научаване; самостоятелна работа на студентите.
С удоволствие ще споделим, че прилагането на новия подход в обучението по синтетична геометрия, осигурен чрез настоящото учебно помагало, увеличи интереса на студентите и започна техният принос в обогатяване на списъка на динамичните чертежи на задачи по проективна геометрия, създадени от самите студенти.

1 Задачи по дескриптивна геометрия

Поради спецификата на дескриптивната геометрия, глави VI и VII на учебника Синтетична геометрия, посветени на дескриптивната геометрия , съдържат изчерпателна информация , придружена с чертежи, за всички основни задачи като са разгледани и възможните частни случаи. Задачите по дескриптивна геометрия в глава $VIII$ на учебника или се свеждат до тези основни задачи, или са набор от тях. Ето защо в настоящото учебно помагало не са включени решения на задачите 40 -47 по дескриптивна геометрия, а само отпратки към съответните параграфи и страници на учебника. Решени с чертежи са две от задачите на 48.

Аксонометрия

Да подредим в таблица параметрите (ъглите между аксонометричните оси и коефициентите на изменение), характеризиращи петте най-използвани аксонометрични проекции:

проекция	$\angle(x', y')$	$\angle(y', z')$	$\angle(z', x')$	p	q	r
кабинетна проекция	135^o	135^o	90^o	1	$\frac{1}{2}$	1
кавалиерна перспектива	135^o	135^o	90^o	1	1	1
военна перспектива	90^o	135^o	135^o	1	1	1
увеличена правоъгълна изометрия	120^o	120^o	120^o	1	1	1
увеличена правоъгълна диметрия	$131^o25'$	$131^o25'$	$97^o10'$	1	$\frac{1}{2}$	1

Задача 40. Да се изобразят точките $A(3, 4, 5)$, $B(-2, 6, -3)$, $M(2, 5, 0)$, $N(5, 0, 3)$, $P(0, 2, 4)$ в :
40.1 кабинетна проекция ;
40.2 кавалиерна перспектива ;
40.3 военна перспектива ;
40.4 увеличена ортогонална диметрия ;
40.5 увеличена ортогонална изометрия.

Решение. Изобразяването на точки, прави и равнини се извършва като предварително се намерят адаптираните координати на точките (виж учебника, §30, стр.121), а после построенията са аналогични на посочените в §32, стр.129 на учебника.

Задача 41. В кабинетна проекция да се намерят стъпките на правата $g[A(-3, 4, 1), B(6, -3, 6)]$.

Решение. Виж учебника, §32.2, стр.129.

Нека отбележим :
1) Всички следствия, записани в §32, 33, 34 на учебника , касаещи кабинетна проекция са в сила и за другите аксонометрични проекции, защото те следват от твърденията на §29.
2) Всички построения, описани в §32, 33, 34 на учебника, се повтарят и в другите аксонометрични проекции при отчитане на конкретния аксонометричен кръст и коефициенти на изменение за всяка от тях.

Задача 42. В кавалиерна перспектива да се изобрази права $g \ni N(4, 0, 4)$, $g \| \mu$ и пресичаща правата $c[K(4, 2, 1), L(-4, 4, 10)]$.

Решение. Виж учебника, §32.3, 32.5.1, Следствие 32.1. Справката обосновава построенията: $g_2 \ni N_2, g_2 \| x'$; $g_2 \cap c_2 = A_2$; $A' \in c', A_2A' \| z'$; $g' = N'A'$.

Задача 43. В увеличена ортогонална диметрия да се построят дирите на равнината α, ако:
43.1 Точка $A(2; 2; 6, 5) \in \alpha$ и права $b[B(7, 0, -8), C(0, 14, 6)] \in \alpha$;
43.2 Права $b[B(4, -4, 3), C(-2, 8, 5)] \in \alpha$ и $\alpha \perp \mu$;
43.3 Права $b[B(4, -4, 3), C(-2, 8, 5)] \in \alpha$ и $\alpha \perp \nu$.

Решение.
43.1 Задайте равнината α с две пресичащи се прави (напр. $a = AB$ и b) или с две успоредни прави $c \| b$, където $c \ni A$. Дирите на α минават през стъпките на правите, лежащи в нея (виж Твърдение 29.3 и §33.2.1). Следователно $m'_\alpha = M'_a M'_b$, $n'_\alpha = N'_a N'_b$ като много удобно е да се използва и точката $X'_\alpha = m'_\alpha \cap n'_\alpha \cap x'$.

43.2 Съгласно Твърдение 29.4 и §33.7.1 имаме $m'_\alpha = b_1$. Тъй като $m'_\alpha \cap x' = X'_\alpha$ и $m'_\alpha \cap y' = Y'_\alpha$, то $n'_\alpha \ni X'_\alpha$ и $n'_\alpha \| z'$, а $p'_\alpha \ni Y'_\alpha$ и $p'_\alpha \| z'$.

43.3 Съгласно Твърдение 29.5 и §33.7.2 имаме $n'_\alpha = b_2$. Тъй като $n'_\alpha \cap x' = X'_\alpha$ и $n'_\alpha \cap z' = Z'_\alpha$, то $m'_\alpha \ni X'_\alpha$ и $n'_\alpha \| y'$, а $p'_\alpha \ni Z'_\alpha$ и $p'_\alpha \| y'$.

Задача 44. В увеличена ортогонална изометрия да се намери пресечницата на равнините:
44.1 $\alpha[-4, 3, 5]$ и $\beta[6, 8, 9]$;
44.2 $\gamma[4, 6, \infty]$ и $\delta[-5, 3, 6]$.

Решение.
44.1 Виж §33.8.1 на учебника.
44.2 Виж §33.8.2 на учебника.

Задача 45. В кабинетна проекция да се определи прободът на правата $AB[A(6, 4, 9), B(-2, 0, 2)]$ с равнината:
45.1 $\alpha[3, 6, -4]$;
45.2 $\beta[4, 8, \infty]$.

Решение.
45.1 Виж §33.9.1 на учебника.
45.2 Виж §33.9.3 на учебника.

Задача 46. В кабинетна проекция да се намери общата точка на равнините α, β, γ:
46.1 $\alpha[5,8,7]$, $\beta[-3,4,2]$, $\gamma[\infty,\infty,2]$;
46.2 $\alpha(a \times b)$, $a \perp \mu$, $\beta \| y$, $\gamma \| \nu$, където правите a, b са дадени;
46.3 $\alpha(a \| b)$, $a \perp \pi$, $\beta \| z$, $\gamma(m^\gamma, C)$, където точка C и правите a, b, m^γ, неинцидентни с C, са дадени;
46.4 $\alpha[5,6,4]$, $\beta \ni F(4,8,4), \beta \| \delta[-1,\infty,3]$, $\gamma[\infty,2,\infty]$.

Решение. Ако $\alpha \cap \beta \cap \gamma = Q$ и $\alpha \cap \beta = s$, $\beta \cap \gamma = k$, $\gamma \cap \alpha = l$, то $s \cap k \cap l = Q$. Очевидно е, че две от трите посочени пресечници са достатъчни. Използвайте §33.8 и преценявайте кои са най-удобните двойки равнини, за да намерите техните пресечници.
46.2 Отчетете, че $\alpha \perp \mu$ като $m'_\alpha = b_1$; $\beta \perp \nu$.
46.3 Отчетете, че $\alpha \perp \pi$ като $p'_\alpha = b_3$ и $\beta \perp \mu$.
Изберете произволна точка $M \in m_\gamma$ и намирайки втора стъпка на правата CM, постройте втората диря на γ.

46.4 От $\delta \perp \nu$ и $\beta \| \delta$ следва $\beta \perp \nu$. Използвайте §34.3.1, за да построите дирите на β ($n'_\beta \ni F_2$ и $n'_\beta \| n'_\delta$). Тъй като $\gamma \| \nu$, то $\gamma \perp \mu$ и $\gamma \perp \pi$, което опростява посроенията.

Задача 47. В кабинетна проекция да се изобрази :

47.1 Равностранен триъгълник ABC с връх $A(2,1,0)$ и страна BC, лежаща върху правата $a[K(8,0,0), L(7,2,0)]$.

47.2 Правилен шестоъгълник, лежащ в координатната равнина μ, със страна $4,5cm$, единият връх на който е инцидентен с оста x, а центърът му е точка от правата $g[Q(-3,-2,3), R(6,6,-2)]$.

47.3 Окръжност, която лежи в координатната равнина μ, минава през точката $A(1,2,0)$ и центърът ѝ е точка от правата $s[C(-1,8,8), D(2,4,2)]$.

47.4 Окръжност, която се допира до правите $p[P(2,0,0), T(0,3,0)]$ и $q[Q(-2,0,0), R(0,2,0)]$ и има радиус 2.

Решение. Всяка от фигурите, която трябва да се изобрази, лежи в координатната равнина μ. За определяне на върховете на фигурите във всяка от задачите се налага да се извършат планиметрични построения. Както е показано в §31, стр.125-127 трябва да се извърши склопяване на μ до ν.

47.2 Центърът на шестоъгълника е точката $S = g \cap \mu = M_g$, т.е. първата стъпка на правата g.

Задача 48. В кабинетна проекция да се изобрази :

48.1 Правилна четириъгълна пирамида с основа, лежаща в μ, с основен ръб $AB[A(3,4,0), B(3,8,0)]$ и височина $h = 6$.

48.2 Правилна триъгълна призма с основа, лежаща в μ, с основен ръб $AB[A(3,4,0), B(3,8,0)]$ и височина $h = 6$.

48.3 Правилна шестоъгълна пирамида с основа, лежаща в μ, с основен ръб $AB[A(3,4,0), B(3,8,0)]$ и височина $h = 6$.

48.4 Правилна четириъгълна пирамида с основа, лежаща в μ, с основен ръб $AB[A(2,6,0), B(6,2,0)]$ и височина $h = 7$.

48.5 Правилна четириъгълна пирамида с основа, лежаща в μ, с диагонал $AC[A(8,8,0), C(2,0,0)]$ и височина $h = 12$.

48.6 Правилна триъгълна призма с основа, лежаща в μ, ако единият от нейните околни ръбове лежи в π, един връх е точката $A(5,0,0)$, дължината на основния ръб е 6 и височината ѝ е $h = 7$.

48.7 Наведена четириъгълна призма с ос $PQ[P(4,4,0), Q(-3,3,7)]$ и основа квадрат, лежащ в μ, чийто връх е точката $A(7,5,0)$.

48.8 Правилна шестоъгълна призма с основа, лежаща в μ, с основен ръб $AB[A(1,2,0), B(6,2,0)]$ и височина $h = 9$.

48.9 Правилна четириъгълна пирамида с основа $ABCD$, лежаща в μ, околна стена, лежаща в равнината $\alpha[4,-3,7]$ и връх V, инцидентен с правата $g[G(7,0,6), g\|y]$.

48.10 Правилна четириъгълна призма с основа - квадрат $ABCD$, лежащ в μ, с диагонал $AC\|y$ и дадена дължина на околния ръб.

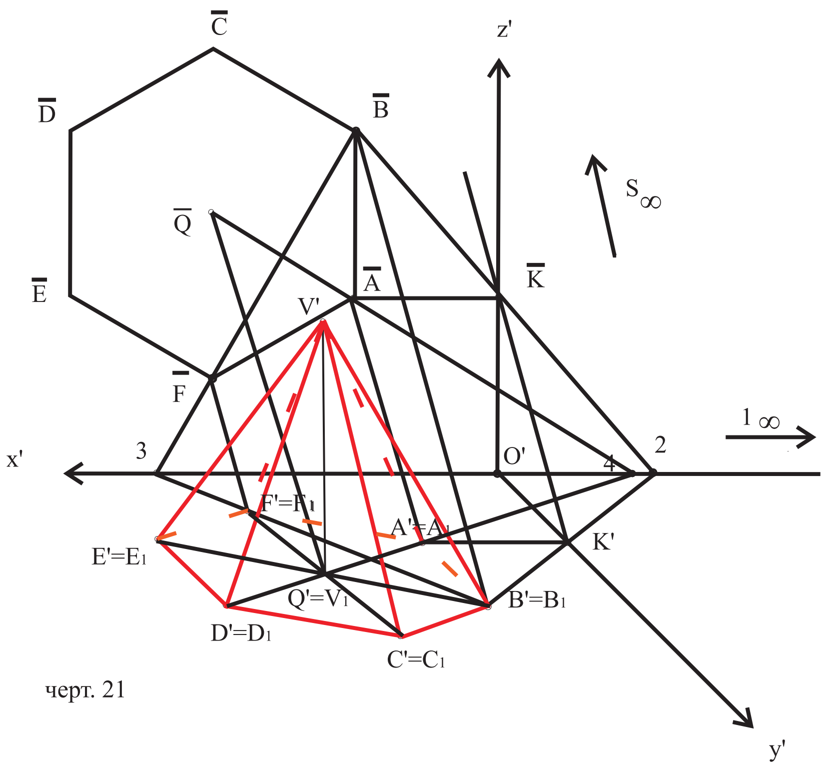
48.11 Правилна триъгълна призма с основа ABC, лежаща в μ, с основен ръб AB, който е в общо положение спрямо координатните оси x и y и има дължина a.

48.12 Четириъгълна призма с основа - квадрат $ABCD$, лежащ в μ, с диагонал $AC\|y$ и дадена дължина на околния ръб. За по-любознателните студенти на динамичния чертеж е представено и сечението на призмата с равнина α, определена от точките $P \in BC$, $R \in CD$, $Q \in BBo$.

Решение. Основите на многостените, които трябва да се изобразят, са правилни многоъгълници и лежат в координатната равнина μ. Универсалният подход за определяне на основните върхове минава през склопяване на μ до ν (виж §31, стр.125-127). В някои от задачите основен ръб или диагонал е успореден на оста x или y. Така например в задачи 48.1, 48.2, 48.3 основният ръб $AB\|y$, а в зад. 48.8 основният ръб $AB\|x$. Сега имате избор или да склопявате μ до ν, или да прилагате построенията, предложени в §31, стр.123-125.

Височините на правилните пирамиди с основи в μ, както и околните ръбове на правилните призми с основи в μ са успоредни на оста z. Ето защо главните им аксонометрични образи са успоредни на оста z' от аксонометричния кръст, а поради $r = 1$ (както е в кабинетна проекция) дължините им се запазват.

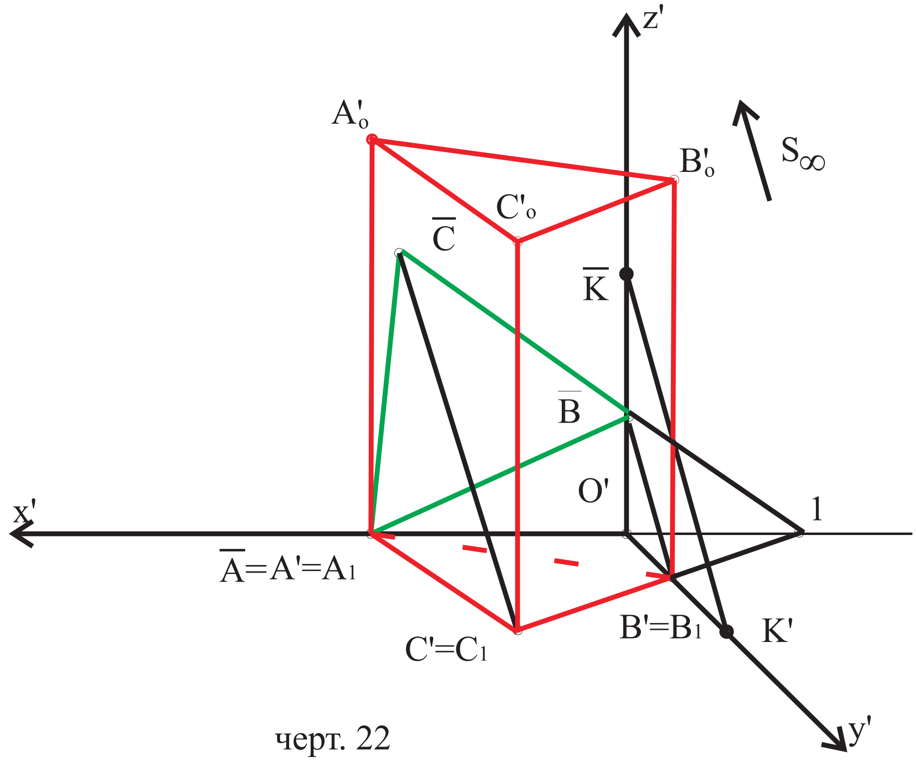
48.3 (черт. 21) Правилният шестоъгълник е еднозначно определен със страната си. Достатъчно е да намерим центърът Q на описаната около него окръжност. Това е третият връх на равностранен триъгълник със страна AB. Съществуват две възможности за местоположението на точка Q. Но главният аксонометричен образ на основата не е правилен шестоъгълник, поради което не можем да го построим директно.За да изобразим основата се налага да извършим склопяване на μ до ν (виж §31, стр.125-127). Ако $K' \in y'$ е произволна точка, то склопеното ѝ положение до ν е точката $\overline{K} \in z' = \overline{y}$, където $O'\overline{K} = 2\ O'K'$. Така задаваме афинната хомология $\phi(x', K' \longrightarrow \overline{K})$. Следователно безкрайната точка $U_{K'\overline{K}} = S_\infty$ е център на ϕ. Сега склопяваме последователно точките A' и B'. На черт. 23 е видно, че $A'K' \cap x' = 1_\infty$, а $B'K' \cap x' = 2$. Ето защо $\overline{A} = A'S_\infty \cap \overline{K}1_\infty$, а $\overline{B} = B'S_\infty \cap \overline{K}2$.



черт. 21

Построяваме правилния шестоъгълник $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E}\,\overline{F}$ и започваме отклопяването. Достатъчно е да намерим точките $F' = \overline{F}S_\infty \cap 3B'$ и $Q' = \overline{Q}S_\infty \cap 4A'$. Останалите три върха C', D', E', са симетрични съответно на F', A', B', относно Q', а $V_1V' = 7$.

48.6 (черт. 22) От условието, че едната основа на призмата лежи в μ, а околен ръб, например ръбът BB_o лежи в π , следва че основният връх $B \in y$.
Задаваме афинната хомология $\phi(x', K' \longrightarrow \overline{K})$ с ос x' и център безкрайната точка $U_{K'\overline{K}} = S_\infty$. Тъй като точка A лежи върху оста на хомологията, а както знаем всяка нейна точка е двойна, то $\overline{A} = A'$. За да построим равностранния триъгълник $\overline{A}\ \overline{B}\ \ \overline{C}$ използваме, че $\overline{B} \in \overline{y}$ и $\overline{B} \in \overline{k}(\overline{A}, r = 6)$.
Следва отклопяване и получаваме : $B' = \overline{B}S_\infty \cap y'$ и $C' = \overline{C}S_\infty \cap 1B'$.
Околните ръбове са успоредни на оста z, поради което и аксонометричните им образи са успоредни на оста z'. Дължината им се запазва 7, понеже $r = 1$.



черт. 22

Бележка. В раздел II на част I на учебното помагало, където са динамичните чертежи на задачи по проективна геометрия са включени и динамични чертежи на задачи 48.2, 48.3, 48.10, 48.11, 48.12, 48.13. Ще отбележим, че при изработване на динамичните чертежи се отказваме от координатите на точките, за да осигурим тяхната мобилност. Отчитаме само указаното разположение на основен ръб или диагонал спрямо координатните оси x и y.

Взаимно пресичане на пирамиди и призми

Линията на пресичане на два многостена е начупена линия, точките на която принадлежат едновременно на двете повърхнини. Върховете на линията на пресичане са прободите на ръбовете на единия многостен със стените на другия многостен и обратно. Страните на линията на пресичане са пресечниците на стените на двата многостена.

Ако единият многостен е m – ъгълен, а другият е n – ъгълен, то трябва да повторим (m + n) пъти задачата за пробод на права с многостен. Да означим условно произволен околен ръб на единия многостен с g . Тогава решението на задачата за пробод на правата g с другия многостен минава през следните стъпки:

А) Задаване на равнина α, инцидентна с правата g;

Б) Намиране на сечението на равнината α с многостена;

В) Определяне на пресечните точки на правата g със сечението.

Равнината α, инцидентна с правата g се нарича спомагателна.

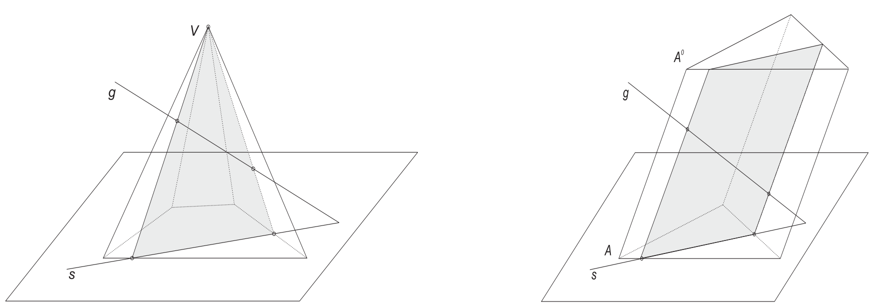
Нека наречем неосновния връх на пирамидата **главен връх.**

Очевидно е, че в стъпка А) има безброй възможности в избора на спомагателната равнината α **.** Възползвайки се от тази възможност, правим избор, с който опростяваме максимално както стъпка Б) в решението, така и построението на дирите на α **.**

В случай, че многостенът е пирамида, избираме равнината, която е инцидентна с правата **g** и главния връх **V** на пирамидата. Сечението е триъгълник.

В случай, че многостенът е призма, избираме равнината, която е инцидентна с правата **g** и е успоредна на околните ръбове на призмата. Сечението е успоредник.

Пресечните точки на **g** със сечението са прободите на g с многостена.



черт.1

На горните чертежи пресечницата на равнините на основата и сечението е означена с s.

В разглежданите от нас задачи основите на многостените лежат в координатните равнини μ, ν, π на пространствената координатна система Oxyz, спрямо която са зададени обектите. Тогава стъпките на околните ръбове на многостените съвпадат с основните им върхове, лежащи в координатните равнини, а правата s съвпада със съответната диря на спомагателната равнина, т.е. равнината на сечението.

Трите възможни случая за вида на два многостена, които ще пресичаме са:

A.1. Две пирамиди с върхове U и V ;

A.2. Пирамида с връх V и призма с околен ръб PP^o ;

A.3. Две призми с околни ръбове съответно AA^oи PP^o .

Да означим с **t** правата UV за случая A.1 или правата през точка U , която е успоредна на PP^o за случая A.2. **Правата t се нарича върхова права.** Достатъчно е всяка от спомагателните равнини α да е инцидентна с върховата права **t** , за да е гарантирано сечението да бъде триъгълник или успоредник. Настина, от $t \in \alpha$ следва $U, V \in \alpha$ или $U \in \alpha$ и $PP^o \| \alpha$.

Тогава $M_t \in m_\alpha$, $N_t \in n_\alpha$, $P_t \in p_\alpha$. Така с намирането на необходимата стъпка на правата t вече е определена една точка от правата s .

В случая A.3 е удобно спомагателните равнини α да са успоредни едновременно на околните ръбове и на двата многостена. За целта през произволна точка **K** се построяват прави $a \| AA^o$ и $p \| PP^o$ и чрез стъпките на тези прави се построяват дирите на равнината λ (a, p) . Тогава достатъчно е спомагателните равнини α да са успоредни на λ, което означава $m_\alpha \| m_\lambda$, $n_\alpha \| n_\lambda$, $p_\alpha \| p_\lambda$. Следователно можем да считаме, че отново имаме върхова права, която лежи във всички спомагателни равнини, но сега тя е безкрайна.

От друга страна дирите на спомагателните равнини α ще минават и през стъпките на околните ръбове, лежащи в тях. Както вече отбелязахме те съвпадат с основните върхове на многостените, защото основите им лежат в координатните равнини.

Като рекапитулация на казаното до тук следва, че специалният избор на спомагателните равнини α да минават през правата **t** за случаите $\mathbf{A}_1$и $\mathbf{A}_2$ или да са успоредни на λ за случая $\mathbf{A}_3$ свежда посроението на правата **s** до свързване на едноименните стъпки на две прави (върховата права t и околен ръб) или построяване на права през точка (стъпка на околен ръб, т.е. основен връх) и успоредна на диря на равнината λ**.**

Във връзка с третата основна стъпка в решението на задачата за пробод на права с многостен ще отбележим, че тъй като правата **g** и сечението лежат едновременно в равнината α, то съществуването на пресечните точки на **g** със сечението е гарантирано и точно тези точки са търсените прободи (черт.1).

Пресечните точки на правата **s** със страните на основата на многостена, лежаща в съответната координатна равнина, се определят директно, след което построението на сечението е елементарно.

Когато два многостена се пресичат, се оказва, че може да има части от тях, които не участват в пресичането.Те съдържат околните ръбове, които нямат общи точки с другия многостен. Прието е тези части да се наричат изолирани.

Нека припомним, че всички спомагателни равнини, които се използват при взаимното пресичане на два многостена, образуват сноп равнини с носител върховата права, която е крайна права за случая на две пирамиди или пирамида и призма и безкрайна права за случая на две призми. Определянето на изолираните части върху многостените, които ще се пресичат, става с помощта на **контурните** или наричани още **допирателни спомагателни равнини** през върховата права, така че вътре в двустенния ъгъл , определен от тях, да са разположени всички останали спомагателни равнини. На чертежната равнина това означава аналогично разположение на дирите на допирателните спомагателни равнини и дирите на останалите спомагателни равнини. Така дирите на допирателните спомагателни равнини за всеки многостен ще отсичат от основата на другия многостен изолираните им части, ако има такива. В тях са разположени стъпките на онези околни ръбове, които нямат прободи с другия многостен. Тъй като основите на разглежданите от нас многостени са изпъкнали, то броят на изолираните части може да бъде 2, 1, 0.

Разположение на изолираните части върху двете тела и влиянието му върху вида на линията на пресичане

1. *Изолираните части са две.* Има две възможности за разположение на двете изолирани части .

1.1 Съществува точно по една изолирана част върху всеки многостен. Това разположение означава , че съществуват околни ръбове на всеки от многостените, които не пробождат другия многостен . Сега линията на пресичане е една затворена пространствена начупена линия.

1.2 Двете изолирани части са разположени върху единия многостен. Това означава, че околни ръбове на точно единия от двата многостена не пробождат другия многостен. Сега линията на пресичане съдържа два пространствени многоъгълника.

2. *Изолираната част е една.* Това е възможно, когато едната двойка допирателни спомагателни равнини съвпадат. Следователно два околни ръба не само се пресичат, но и общата им спомагателна равнина е допирателна едновременно и за двата многостена. Пресечната точка на тези два специални околни ръба наричаме **точка на допиране за двата многостена**.

Сега линията на пресичане може да се разглежда или като една затворена начупена линия, която минава два пъти през допирната точка или като две затворени начупени линии с обща точка – допирната точка.

3. *Не съществува изолирана част.* Това е възможно, когато двете двойки допирателни спомагателни равнини съвпадат. Следователно двата многостена имат две допирни точки, съвпадащи с пресечните точки на двете двойки околни ръбове, чиито общи спомагателни равнини съвпадат съответно с двете общи допирателни спомагателни равнини.

Линията на пресичане съдържа няколко самостоятелни компоненти с две общи точки – допирните точки. Тя може да се разглежда или като една начупена затворена линия, която минава по два пъти през всяка от допирните точки или като няколко пространствени многоъгълника, всеки от които е с върхове и в допирните точки.

Поради изпъкналостта на основите, допирните точки не могат да бъдат повече от две, когато техният брой е крайно число. Случаят на съществуване на безброй допирни точки ще разглеждаме по-късно.

Когато линията на пресичане представлява една начупена затворена пространствена линия (пространствен многоъгълник), това означава, че всяко тяло пресича другото отчасти. Този случай на пресичане на две тела се нарича **зазъбване**.

Когато линията на пресичане се състои от няколко многоъгълника (най-често два), някои от които са пространствени, а други равнинни, в литературата е прието да се казва, че има **проникване**.

Класификация на прободите, базирайки се на взаимното положение на спомагателните равнини на различните околни ръбове

С1). Спомагателната равнина на околен ръб от единия многостен не минава през околен ръб на другия многостен. Тогава съществуват следните възможности:

С1.1. Разглежданият околен ръб няма обща точка с другия многостен ;

С1.2. Разглежданият околен ръб пробожда другия многостен в две точки, разположени във вътрешността на две различни негови стени ;

С2). Спомагателните равнини на два околни ръба от различни многостени съвпадат. Тогава съществуват следните възможности:

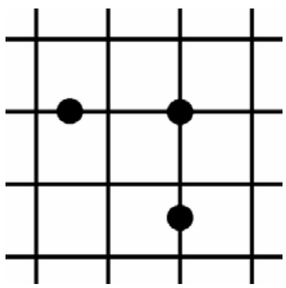
С2.1. Общата спомагателна равнина на двата околни ръба не е допирателна за нито единия от двата многостена.

Сега всеки от околните ръбове има по два пробода : един общ (пресечната им точка) и по един във вътрешността на околна стена на другия многостен. Общият брой на прободните точки на двата пресичащи се околни ръба е три.

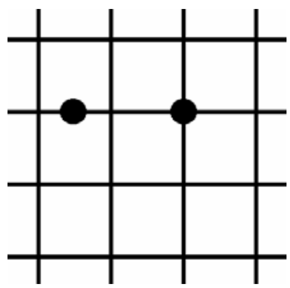
C2.2. Общата спомагателна равнина на двата околни ръба е допирателна точно за единия от двата многостена. В този случай двата пресичащи се околни ръба имат два пробода, от които единият е общ;

C3). Общата спомагателна равнина на два околни ръба от различни многостени е едновременно допирателна за двата многостена, т.е. тя съвпада с едната двойка допирателни спомагателни равнини за двата многостена.

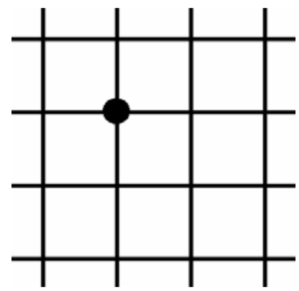
Казваме, че два пресичащи се многостена имат допирна точка, когато две техни допирателни спомагателни равнини съвпадат, така че точно два околни ръба, принадлежащи на различни многостени, лежат там.



C 2.1



C 2.2



C 3

C4). Двете двойки допирателни спомагателни равнини за двата многостена съвпадат. Сега многостените имат две допирни точки.

C5). Спомагателните равнини на два околни ръба от единия многостен съвпадат. Тогава съществуват следните възможности:

C5.1. Общата спомагателна равнина на двата околни ръба от единия многостен не минава през околен ръб на другия многостен.

Тогава всеки от двата разглеждани околни ръбове е в ситуацията C1).

C5.2. Общата спомагателна равнина на двата околни ръба от единия многостен минава през околен ръб на другия многостен, т.е три околни ръба имат обща спомагателна равнина.

Сега има две двойки, образувани от трите изследвани околни ръба, които са в ситуацията C2) или C3).

C5.2 U C2.

Общият брой на прободите е четири като всеки ръб има по два пробода, разположени по един във вътрешността на околна стена и върху споменатия вече трети околен ръб на другия многостен.

Нека припомним, че два околни ръба, лежащи в една и съща околна стена на даден многостен, се наричат **съседни**.

Отсечката върху този трети околен ръб, с краища двата пробода, принадлежи на линията на пресичане на двата многостена.

C5.2.1 Двата околни ръба от единия многостен са съседни.Следователно общата спомагателна равнина е допирателна само за този многостен. Тогава отсечката върху третия околен ръб е сегмент от линията на пресичане;

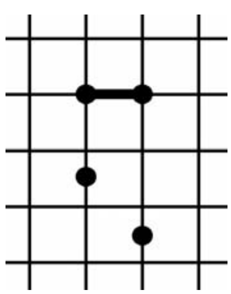
C5.2.2 Двата околни ръба от единия многостен не са съседни. Тогава тсечката върху третия околен ръб не е сегмент от линията на пресичане;

C5.2 U C3

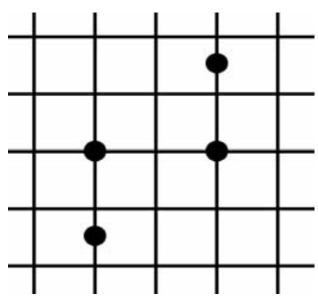
C5.2.3 Общата спомагателна равнина за трите околни ръба е допирателна едновременно за двата многостена.

Прободните точки са две и те са пресечните точки на околните ръбове на единия многостен с третия околен ръб, принадлежащ на другия многостен.

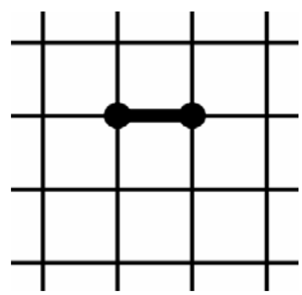
Казваме, че два пресичащи се многостена имат допирна отсечка, когато две техни допирателни спомагателни равнини съвпадат, така че точно два съседни околни ръба от единия многостен и един околен ръб от другия многостен, лежат там.



C 5.2.1



C 5.2.2



C 5.2.3

C6) Спомагателните равнини на четири околни ръба - по два от всеки многостен -съвпадат. Това означава, че спомагателните равнини, определени от двете двойки околни ръбове съвпадат. Прободите са четири, разположени по два върху всеки от тези околни ръбове и нито един от тях не е във вътрешността на околна стена. Сега съществуват три възможности:

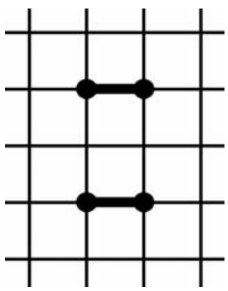
C6.1. Двата околни ръба на единия многостен са съседни, т.е. лежат в околна стена за този многостен, а другата двойка околни ръбове не са съседни.

Сега двукратно се появява ситуацията C5.2.1 и начупената линия на пресичане на двата многостена съдържа две отсечки от околните ръбове, които не лежат в една и съща околна стена.

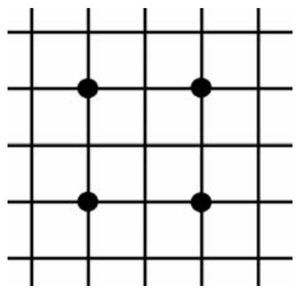
С6.2. Двете двойки околни ръбове не лежат в околни стени за двата многостена. Сега в начупената линия на пресичане не участва отсечка, принадлежаща на някой от тези ръбове.

С6.3. Двете двойки околни ръбове лежат в околни стени за двата многостена. Общата им спомагателна равнина е контурна едновременно за двата многостена. Тогава четирите пробода са върхове на равнинен четириъгълник , чиято площ е общата част на упоменатите две околни стени. Тя се присъединява към начупената линия на пресичане на двата многостена.

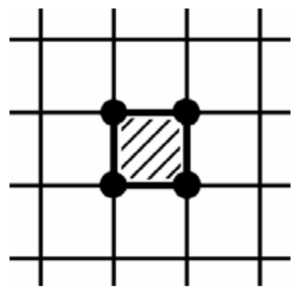
Казваме, че два пресичащи се многостена имат допирна площ, когато спомагателните равнини на две двойки съседни околни ръбове за двата многостена съвпадат.



C 6.1



C 6.2



C 6.3