*ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА*

**ПУ "Паисий Хилендарски"**

*Боян Златанов, Самет Караибрямов, Бистра Царева*

**УЧЕБНО ПОМАГАЛО**

**за учебната дисциплина**

# СИНТЕТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

**2011**

## УЧЕБНО ПОМАГАЛО ПО СИНТЕТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ[1]

Учебната дисциплина Синтетична геометрия съдържа две части: проективна геометрия и дескриптивна геометрия и се преподава на специалностите Математика, Математика и информатика (с хорариум 40 часа лекции и 40 часа упражнения), Физика и Математика (с хорариум 30 часа лекции и 30 часа упражнения). Лекциите следват учебника "Синтетична геометрия"с автор доц.д-р Бистра Царева.

Обучението завършва с изпит, като оценката се формира върху следните компоненти:
1. Решаване на задачи с ползване на учебника за справка върху теорията.
2. Доказване на теореми без да се използва литература за справка. Теоремите са селектирани в 4 групи в зависимост от трудността на доказателството им. Всеки студент сам избира групата теореми, върху която ще бъде изпитан в устна беседа от преподавателя, с което определя и диапазона на точките, които ще получи за тази част от изпита.
3. Курсова работа.
4. Присъствие и активност по време на занятията.

Последната глава на новото издание на учебника "Синтетична геометрия"(2010) съдържа задачи по проективна и дескриптивна геометрия, които са тематично подредени съобразно учебната програма и са достатъчни както за провеждане на упражненията, така и за самостоятелната работа на студентите, но липсват решения (както изисква системата на изпитване).
Настоящето учебно помагало е не само притурка към учебника по Синтетична геометрия, в която са дадени решения и упътвания на подбрани задачи, така че студентът да се учи и сам да се справя с решаването на задачите в тази учебна дисциплина. То осигурява прилагане на иновативни методи в обучението по геометрия.
Учебното помагало е конструирано в две части, всяка от които съдържа съответно задачи по проективна геометрия и задачи по дескриптивна геометрия.
Всяка част съдърха два раздела.
Първият раздел може да се принтира и ползва и на книжен носител.
**Вторият раздел на първата част предлага динамични чертежи на избрани задачи по проективна геометрия и възможност да се създават динамични чертежи на други задачи като се използва авторската програма CAM. В същото време решенията могат и да се презентират последователно стъпка по стъпка.** Замяната на листа и молива с компютър при изпълнение на чертежите, облекчава и осъвременява процеса на обучение.
**Вторият раздел на втората част предлага интерактивно обучение по темата "Взаимно пресичане на призми и пирамиди в аксонометрия"**

[1]Първите двама автори на учебното помагало са частично финансирани от Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“, НПД проект NI11-FMI-004

**с помощта на създадения от нас образователен софтуер САМ, написан на $C\sharp$ в среда на .NET framework 4.**
Програмата позволява да се следва ръчното решение на задачите, като се ползва метода на спомагателните равнини. Достатъчно е да се въведат координатите на върховете на двата многостена и програмата предлага на ползвателя пълното решение на задачата във всяка от петте популярни аксонометрични проекции (кабинетна проекция, кавалиерна и военна перспективи, правоъгълни изометрия и диметрия). То включва финалния чертеж, списък на етапите на решението с кратък коментар на по-значимите от тях и последователност на всички стъпки в решението. Етапите в решението на всяка задача са: изобразяване на телата, построяване на върховата права и стъпките ѝ, последователно построяване на прободните точки на околните ръбове на всеки многостен с другия, развиване на прободната схема, корекция на видимостта на ръбовете, съобразена с взаимното пресичане на телата и на края скривайки всички спомагателни линии , композицията на двата пресичащи се многостена е представена в перспектива. Студентът може да избере най-подходящата проекция за конкретната задача и чрез бутона за презентация да проследи построенията във всеки етап с възможността да се движи в двете посоки на времето. За облекчение на ползвателя по време на презентацията всички построения, които не участват в текущия или следващи етапи са скрити. Позвателят е свободен да експериментира върху чертежа, манипулирайки всеки обект поотделно (да променя стил, цвят, размер) или да прилага върху целия чертеж ротация, транслация, свиване, разтягане, мащабиране, принтиране.
Програмата САМ и класификацията на прободните точки на околните ръбове, базирана на взаимното положение на спомагателните им равнини, са инструменти, чрез които преподавателите и студентите могат да съставят бързо и лесно не само стандартни задачи, но и по-интересни задачи, които липсват в известните сборници и учебни помагала. Ползвателят може да променя координати на някои върхове на многостените, за да получи импровизации върху дадена задача или да съставя изцяло нови задачи, включвайки цялото разнообразие на прободите, описано от нашата класификация. Най-добрите импровизации, предложени от студентите в курсовите им работи, ще бъдат включени във втория раздел на втората част на учебното помагало.
Новият подход в обучение по темата осигурява по-задълбоченото ѝ изучаване, стимулира творческата работа на студентите и същевременно максимално облекчава условията на всеки негов етап - подготовка на преподавателя; преподаване и научаване; самостоятелна работа на студентите.
С удоволствие ще споделим, че прилагането на новия подход в обучението по синтетична геометрия, осигурен чрез настоящото учебно помагало, увеличи интереса на студентите и започна техният принос в обогатяване на списъка на динамичните чертежи на задачи по проективна геометрия, създадени от самите студенти.

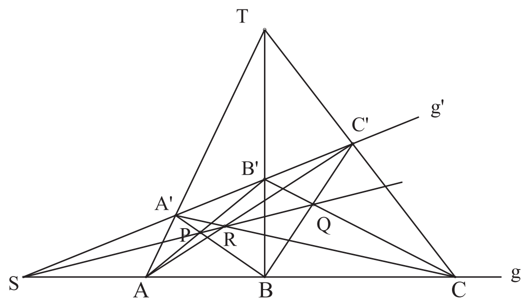
## 1 Част I – Задачи по проективна геометрия

### Перспективни триъгълници. Принцип за дуалност

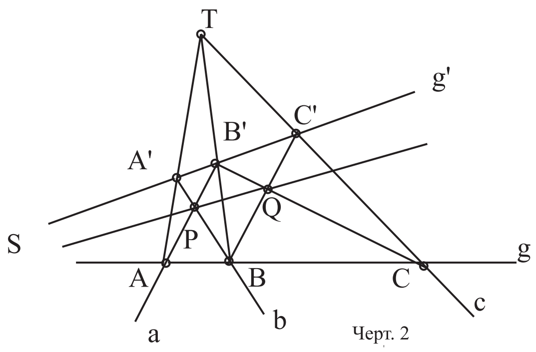
*Аксиома $A_5$ е инструмент за доказване на колинеарност на три точки. Достатъчно е да посочим подходяща двойка триъгълници, удовлетворяващи условията на аксиома $A_5$. За да докажем, че четири точки са колинеарни е достатъчно да докажем, че две тройки от тези четири точки са колинеарни.*

**Задача 1.** Дадени са правите $g$ и $g'$ като $g \cap g' = S$ и точките $A, B, C \in g$ и $A', B', C' \in g'$. Да се докаже, че ако правите $AA', BB', CC'$ минават през една точка, то точките $P = AB' \cap A'B$, $Q = BC' \cap B'C$, $R = CA' \cap C'A$, $S$ лежат на една права.

**Решение.** (черт.1) От условието $AA', BB', CC' \in T$, Определение 2.3 и аксиома $A_5$ следва, че двойките триъгълници $AB'C$, $A'BC'$ и $ABC'$, $A'B'C$ са перспективни и съответно тройките точки $P, Q, S$ и $S, Q, R$ са колинеарни. Тъй като точките $Q$ и $S$ са общи за двете прави, определени от тези тройки точки, то те съвпадат или четирите точки $P, Q, R, S$ са колинеарни.



черт.1



Черт. 2

**Задача 2.** Дадени са правите $g$ и $g'$ като точката $g \cap g' = S$ е недостъпна за чертежа, т.е. точка $S$ е извън чертежния лист.Дадена е още точка $P$, неинцидентна с правите $g$ и $g'$. Да се построи съединителната права на точките $S$ и $P$.

**Решение.** (черт.2) За решението на тази задача прилагаме задача 1. Построяваме произволни прави $a \ni P$ и $b \ni P$. Означаваме : $a \cap g = A$, $a \cap g' = B'$, $b \cap g = B$, $b \cap g' = A'$ и $AA' \cap BB' = T$. Построяваме трета произволна права $c \ni T$ и нека $c \cap g = C$, $c \cap g' = C'$. Тъй като $\triangle AB'C$ и $\triangle A'BC'$ имат перспективен център $T$, то съгласно аксиома $A_5$ точките $P = AB' \cap A'B$, $S = AC \cap A'C'$ и $Q = B'C \cap BC'$ са колинеарни, т.е. търсената права $PS$ съвпада с правата $PQ$, която можем да построим.

**Задача 3.** Дадени са правите $a, b, c, d$ като точките $a \cap b = C$, $c \cap d = C'$ са в чертежния лист, а точките $a \cap c = P$, $b \cap d = Q'$, са извън него. Да се построи правата $PQ$.

**Решение.** Избираме произволна точка $T \in CC'$ и построяваме произволни прави $g \ni T$ и $l \ni T$. Нека $g \cap a = A$, $g \cap c = A'$, $l \cap b = B$, $l \cap d = B'$. $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ удовлетворяват условията на аксиома $A_5$, тъй като имат перспективен център $T$. Тогава точките $AB \cap A'B' = R$, $BC \cap B'C' = b \cap d = Q$, и $AC \cap A'C' = a \cap c = P$ са колинеарни. Така намерихме точка $R$, която лежи върху търсената права $PQ$. Сега прилагаме задача 2 за правите $a$, $c$ и точка $R$.

*Твърдение $A'_5$ (дуално на аксиома $A_5$), известно още като теорема на Дезарг за перспективните триъгълници, е средство, посредсвом което доказваме, че три прави минават през една точка.*

**Задача 4.** Да се докаже, че ако три триъгълника са два по два перспективни с общ перспективен център, то техните три перспективни оси минават през една точка.
Да се формулира дуалната задача.

**Решение.**(черт.3) Да означим трите триъгълника с $A_iB_iC_i$, $i = 1, 2, 3$, а общият им перспективен център - с $T$. От условието следва колинеарност на четворките точки $A_1, A_2, A_3, T$; $B_1, B_2, B_3, T$; $C_1, C_2, C_3, T$;. Трите перспективни оси $t_1, t_2, t_3$ се определят с точките $P_1, Q_1, R_1 \in t_1$, $P_2, Q_2, R_2 \in t_2$, $P_3, Q_3, R_3 \in t_3$, където

$$\begin{aligned} &A_2B_2 \cap A_3B_3 = P_1, \quad &&A_3B_3 \cap A_1B_1 = P_2, \quad &&A_1B_1 \cap A_2B_2 = P_3, \\ &B_2C_2 \cap B_3C_3 = Q_1, \quad &&B_3C_3 \cap B_1C_1 = Q_2, \quad &&B_1C_1 \cap B_2C_2 = Q_3, \\ &C_2A_2 \cap C_3A_3 = R_1, \quad &&C_3A_3 \cap C_1A_1 = R_2, \quad &&C_1A_1 \cap C_2A_2 = R_3. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Да допуснем, че точките $P_1, P_2, P_3$ са колинеарни. Следователно $P_1P_2 = P_2P_3 \Longleftrightarrow A_3B_3 = A_1B_1$, което противоречи на условието, че $\triangle A_3B_3C_3$ и $\triangle A_1B_1C_1$ са перспективни. Следователно допускането не е вярно и точките $P_1, P_2, P_3$ не са колинеарни. Аналогично се доказва, че и тройката точки $Q_1, Q_2, Q_3$ не са колинеарни. Значи съществуват $\triangle P_1P_2P_3$ и $\triangle Q_1Q_2Q_3$ , които ще разгледаме. Тъй като съгласно условието точките

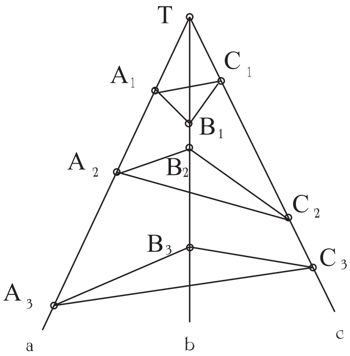
$$P_1P_2 \cap Q_1Q_2 = A_3B_3 \cap B_3C_3 = B_3,$$

$$P_2P_3 \cap Q_2Q_3 = A_1B_1 \cap B_1C_1 = B_1,$$

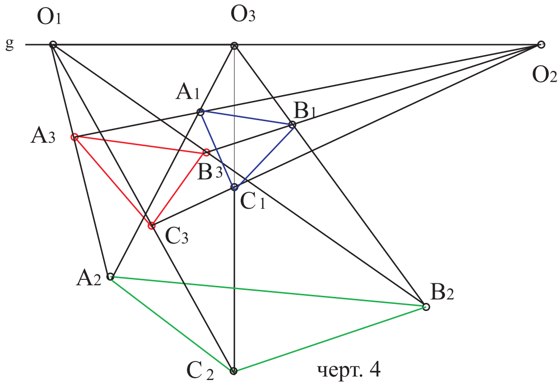
$$P_3P_1 \cap Q_3Q_1 = A_2B_2 \cap B_2C_2 = B_2$$

са инцидентни с права $b$, то прилагайки $A'_5$ получаваме, че $\triangle P_1P_2P_3$ и $\triangle Q_1Q_2Q_3$ са перспективни с перспективна ос $b$ и следователно имат перспективен център $O = P_1Q_1 \cap P_2Q_2 \cap P_3Q_3 = t_1 \cap t_2 \cap t_3$. С това доказахме, че трите перспективни оси $t_1, t_2, t_3$ на дадените в условието триъгълници минават през една точка $O$.

*Дуална задача.* Да се докаже, че ако три триъгълника са два по два перспективни с обща перспективна ос, то трите им перспективни центъра лежат на една права.



черт. 3



черт. 4

**Задача 5.** Да се докаже, че ако три триъгълника са два по два перспективни като техните три перспективни центъра лежат на една права, която не минава през нито един от върховете на дадените триъгълници, то техните три перспективни оси съвпадат.

**Решение.** (черт.4) Нека $\triangle A_2B_2C_2$ и $\triangle A_3B_3C_3$ са перспективни с перспективен център $O_1$, $\triangle A_3B_3C_3$ и $\triangle A_1B_1C_1$ са перспективни с перспективен център $O_2$, а $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle A_2B_2C_2$ са перспективни с перспективен център $O_3$.
За да начертаем триъгълниците, удовлетворяващи условието на задачата, фиксираме точките $O_1, O_2, O_3 \in g$ и избираме произволно перспективните триъгълници $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle A_2B_2C_2$ с перспективен център $O_3$.
Тогава $A_3 = O_1A_2 \cap O_2A_1$, $B_3 = O_1B_2 \cap O_2B_1$, $C_3 = O_1C_2 \cap O_2C_1$.
Точка $A_3 \notin A_1A_2$. Допускането на противното означава съвпадане на правите $A_1A_2$ и $A_2A_3$, от където следва съвпадане на центровете $O_1$ и $O_3$, което противоречи на условието. И така тройките точки $A_1, A_2, A_3$; $B_1, B_2, B_3$; $C_1, C_2, C_3$ са неколинеарни.
Ще използваме означенията (1.1) на задача 4. Следователно трябва да докажем, че трите перспективни оси $t_1 \ni P_1, Q_1, R_1$, $t_2 \ni P_2, Q_2, R_2$, $t_3 \ni P_3, Q_3, R_3$, съвпадат. За целта разглеждаме $\triangle A_1A_2A_3$ и $\triangle B_1B_2B_3$. Лесно се проверява, че тези триъгълници са перспективни с перспективна ос $g$. Тогава от твърдение $A_5'$ следва, че правите $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3$ са инцидентни с една точка, т.е.
$A_2B_2 \cap A_3B_3 = A_3B_3 \cap A_1B_1 = A_1B_1 \cap A_2B_2 \iff P_1 = P_2 = P_3$.
Аналогично, след разглеждане на $\triangle C_1C_2C_3$ и $\triangle B_1B_2B_3$, установяваме $Q_1 = Q_2 = Q_3$. Следователно $t_1 = t_2 = t_3$.

## Пълен четириъгълник. Хармонични групи

**Задача 6.** Даден е пълният четириъгълник $ABCD$ с диагонални точки $P = AB \cap CD$, $Q = BC \cap AD$, $R = AC \cap BD$. Да се опишат хармоничните групи, свързани с двойките диагонални точки и двойките върхове на пълния четириъгълник $ABCD$.

**Решение.**(черт.3.3, учебник, стр.13). Съгласно Определение 4.1 имаме хармоничните групи $H(QR, P_1P_2), H(RP, Q_1Q_2), H(PQ, R_1R_2)$, а съгласно Теорема 5.2 имаме хармоничните групи $H(AB, PP_2)$, $H(CD, PP_1)$, $H(AD, QQ_1)$, $H(BC, QQ_2)$, $H(AC, RR_1)$, $H(BD, RR_2)$.

**Задача 7.** Даден е пълният четириъгълник $ABCD$ с диагонални точки $P = AB \cap CD$, $Q = BC \cap AD$, $R = AC \cap BD$ и точките $P_1 : H(CD, PP_1)$, $Q_2 : H(BC, QQ_2)$, $R_2 : H(BD, RR_2)$ (черт. 3.3).
Да се докаже, че:
а) точките $P_1, Q_2, R_2$ са колинеарни;
б) правите $AB, CR_2, DQ_2$ минават през една точка $F$;
в) двойките точки $BP$ и $AF$ са хармонично спрегнати.

**Решение.**(черт.3.3, учебник, стр.13). **7.а)** Виж Теорема 3.1.
**7.б)** Разглеждаме $\triangle ACD$ и $\triangle BR_2Q_2$ и можем да запишем: $AC \cap BR_2 = AC \cap BD = R$, $AD \cap BQ_2 = AD \cap BC = Q$, $CD \cap R_2Q_2 = P^*$. Но $RQ \cap CD = P_1$, а съгласно 7.а) $P_1 \in R_2Q_2$. Тогава $P^* \equiv P_1 = CD \cap R_2Q_2 \cap RQ$ или $\triangle ACD$ и $\triangle BR_2Q_2$ имат перспективна ос, определена от точките $R, Q, P_1$. Следователно условията на Твърдение $A_5'$ са изпълнени и перспективните $\triangle ACD$ и $\triangle BR_2Q_2$ имат перспективен център $F = AB \cap CR_2 \cap DQ_2$.
**7.в)** Хармоничната група $H(BP, AF)$ следва от Определение 4.1, приложено за пълния четириъгълник $DRQ_2C$.

**Задача 8.** Дадени са колинеарните точки $A, B, C$. Да се намери точка $X$, определена от хармоничната група $H(AB, CX)$.
Да се формулира и реши дуалната задача.

**Решение.** Виж Основната задача на стр.15 от учебника.

**Задача 9.** Да се докаже, че ако са дадени колинеарните точки $A, B, C$, то съществува точно една точка $X$, определена от хармоничната група $H(AB, CX)$.

**Решение.** Виж Теорема 4.2 на стр.15 от учебника.

**Задача 10.** Да се допълни $h_{MN}$ -изображението.

**Решение.** Достатъчно е да се намери образът $X'$ на произволна точка $X \in g = MN$, така че да е в сила $H(MN, XX')$. За целта виж Основната задача на стр.15 от учебника.

### Перспективност

**Задача 11.** Дадени са тройките точки $A, B, C$ и $A', B', C'$, където
$g \cap g' = O$. Да се намери последователност от перспективности, която да изобрази точките $A, B, C$ съответно в точките $A', B', C'$.

Да се разгледат случаите, когато:
**11.1** $g \not\equiv g'$;
**11.1.1** $A = A' = O$ ;
**11.1.2** Точка $O$ не съвпада с двойка съответни точки;
**11.2** $g \equiv g'$.

**Решение.**Задачата е решена в хода на доказателството на Теорема 8.6, I). Виж учебника, стр.31, 32.

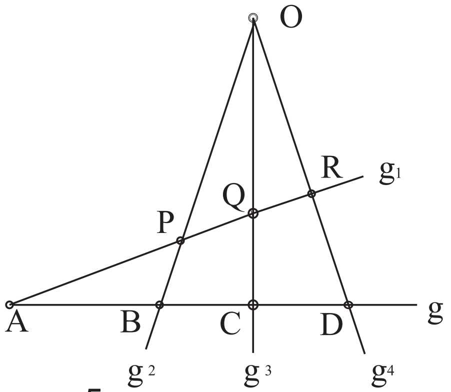
**Задача 12.** Дадени са точките $A, B, C \in g$ и правите $a', b', c' \in S(O')$. Да се намери последователност от перспективности, която да изобрази точките $A, B, C$ съответно в правите $a', b', c'$.

**Решение.**Задачата е решена в хода на доказателството на Теорема 8.6, III).Виж учебника, стр.32.

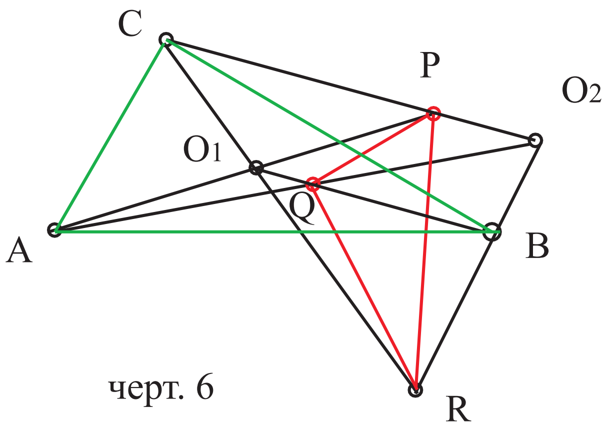
**Задача 13.** Дадени са точките $A, B, C, D \in g$.Да се докаже, че чрез три последователни централни перспективности четворката точки $A, B, C, D$ може да се трансформира в четворката точки :
**13.1** $B, A, D, C$ ;
**13.2** $C, D, A, B$ ;
**13.3** $D, C, B, A$ .

**Решение.** (черт.5) Избираме произволна права $g_1 \ni A$ и произволна точка $O \notin g$ и $O \notin g_1$. Да означим : $BO = g_2$, $CO = g_3$, $DO = g_4$. Разгледайте следните последователности от перспективности :

**13.1** $g \overset{O}{\doublebarwedge} g_1 \overset{C}{\doublebarwedge} g_2 \overset{R}{\doublebarwedge} g$ ; **13.2** $g \overset{O}{\doublebarwedge} g_1 \overset{B}{\doublebarwedge} g_3 \overset{R}{\doublebarwedge} g$ ; **13.2** $g \overset{O}{\doublebarwedge} g_1 \overset{B}{\doublebarwedge} g_4 \overset{Q}{\doublebarwedge} g$ ;



черт. 5



черт. 6

**Теорема на Пап. Проективност, инволюция, допълване.**

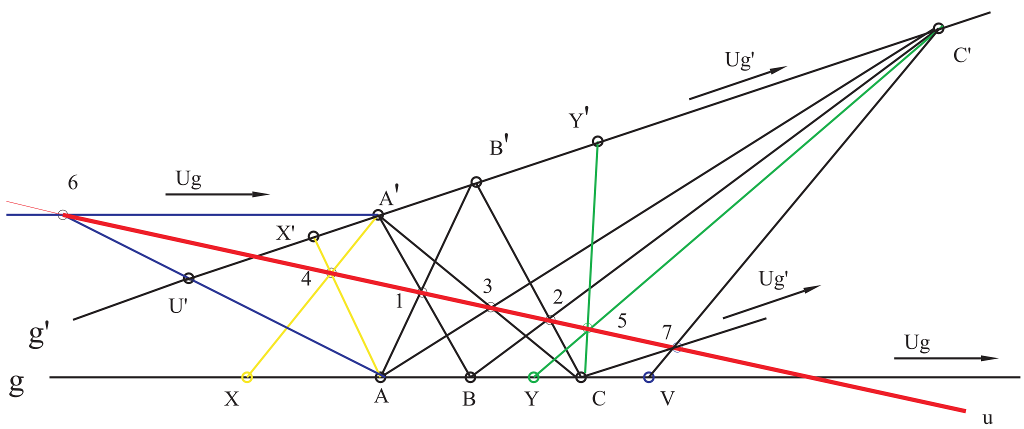
**Задача 14.** Да се докаже, че ако $\triangle ABC$ е перспективен с $\triangle PQR$ и $\triangle QRP$, то той е перспективен и с $\triangle RPQ$.

**Решение.**(черт.6) **Упътване:** Означете с $O_1$ и $O_2$ перспективните центрове съответно на двойките перспективни триъгълници $\triangle ABC$, $\triangle PQR$ и $\triangle ABC$, $\triangle QPR$. Приложете теоремата на Пап за тройките колинеарни точки $A, P, O_1$ и $B, R, O_2$ и на края въз основа на получения резултат, приложете теоремата на Дезарг ($A'_5$), за да докажете, че правите $AR, BP, CQ$ минават през една точка.

*Следвайки Определение 9.1 и твърдението, че всяка перспективност е проективност, разбираме, че конструкцията за допълване на перспективностите е вложена в техните Определения 5.4 и 5.5. Тогава произволна проективност може да се допълва, ако предварително я разложим на произведение от перспективности.*
*Най-простата конструкция за допълване на проективност, индуцирана между два реда точки с различни носители, се основава на Теоремата на Пап.*

**Задача 15.** Дадена е проективността $\varphi : g \to g'$, така че $\varphi(A, B, C) = A', B', C'$. Да се намерят точките: $X' = \varphi(X)$, $Y' = \varphi^{-1}(Y)$, $U' = \varphi(U_g)$, $V = \varphi^{-1}(U_{g'})$.
**Убежни точки на проективността** $\varphi$ се наричат крайните точки $U'$ и $V$, които са съответно образ и първообраз на безкрайните точки $U_g \in g$ и $V_{g'} \in g'$.

**Решение.**(черт.7) *Задача 15 е основната задача в серията задачи за допълване на проективност. Решението ѝ протича в следния ред:*
1) Построяваме колинеационната ос $u$ на проективността $\varphi$, избирайки две измежду следните три точки : $AB' \cap A'B = 1$, $BC' \cap B'C = 2$, $AC' \cap A'C = 3$.
2) Разлагаме проективността $\varphi$ на произведение от перспективности : $\varphi = \pi_2 \circ \pi_1$, където $g \overset{A'}{\underset{\pi_1}{\overline{\overline{\wedge}}}} u \overset{A}{\underset{\pi_2}{\overline{\overline{\wedge}}}} g'$ или $\varphi = \pi_4 \circ \pi_3$, където $g \overset{C'}{\underset{\pi_3}{\overline{\overline{\wedge}}}} u \overset{C}{\underset{\pi_4}{\overline{\overline{\wedge}}}} g'$. Изборът на центровете измежду дадените двойки съответни точки е свободен и съобразен с по-добрата нагледност на чертежа.
3) $\varphi(X) = \pi_2 \circ \pi_1(X) = \pi_2(4) = X'$; $\varphi^{-1}(Y') = \pi_3^{-1} \circ \pi_4^{-1}(Y') = \pi_3^{-1}(5) = Y$;
4) Намирането на убежните точки повтаря построенията от 3. За да оперирате с лекота с безкрайните точки и прави, прочетете отново § 22, защото чертежите се изпълняват в евклидовия модел на проективното пространство.
$\varphi(U_g) = \pi_2 \circ \pi_1(U_g) = \pi_2(6) = U'$; $\varphi^{-1}(U_{g'}) = \pi_3^{-1} \circ \pi_4^{-1}(U_{g'}) = \pi_3^{-1}(7) = V$.



черт. 7

**Задача 16.** Нека $f$ и $f'$ са едноизмерими фигури.
Да се допълни проективността $\varphi : f \to f'$ .

**16.1** $\varphi : g \to g'$, ако $\varphi(A, B, U_\infty) = A', B', C'$, където

$A, B, U_\infty \in g, \quad A', B', C' \in g'$.

**16.2** $\varphi : g \to g'$, ако $\varphi(A, V, U_\infty) = A', V'_\infty, U'$, където
$A, V, U_\infty \in g, \quad A', V'_\infty, U' \in g'$.

**16.3** $\varphi : g \to g$, ако $\varphi(A, B, C) = B, A, C'$, където $A, B, C, C' \in g$.
Докажете, че $\varphi$ е инволюция.Намерете и убежната точка на $\varphi$.

**16.4** $\varphi : g \to S(O')$, ако $\varphi(A, B, U_\infty) = a', b', u'$, където
$A, B, U_\infty \in g, \quad a', b', u' \in S(O')$.

**16.5** $\varphi : S(O_\infty) \to S(O')$, ако $\varphi(a, b, \omega) = a', b', c'$, където
$a, b, \omega \in S(O_\infty), \quad a', b', c' \in S(O')$.

**16.6** $\varphi : S(O_\infty) \to g'$, ако $\varphi(a, b, c) = A', B', C'_\infty$, където
$a, b, c \in S(O_\infty), \quad A', B', C'_\infty \in g'$. Намерете правата $u' = \varphi(\omega)$.

**16.7** $\varphi : S(O) \to S(O)$, ако $\varphi(a, b, c) = b, a, d$, където $a, b, c, d \in S(O)$.

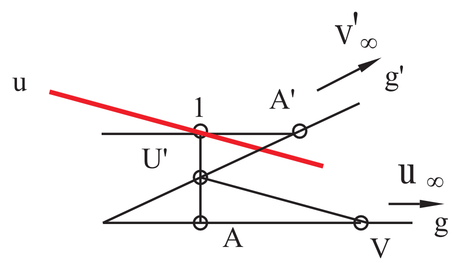
**16.8** $\varphi : g \to g$, ако $\varphi(A, B, M) = A', B', M$, където $A, B, A', B', M \in g$.
Намерете втората двойна точка на $\varphi$, в случай че има такава.

**16.9** $\varphi : g \to g$, ако $\varphi(A, M) = A', M$, където $A, A', M \in g$ и $\varphi$ е параболична проективност.
Формулирайте и решете дуалната задача.

**16.10** $\varphi : g \to g$, ако $\varphi(A, M) = A', M$, където $A, A', M \in g$ и $\varphi$ е инволюция.
Формулирайте и решете дуалната задача.

**Решение.** *Означението за безкрайната точка $U_g$ на правата $g$ не е единствено. Прието е тя да се отбелязва още и по следния начин $U_\infty$ или $G_\infty$. В следващите задачи ще се срещат и тези означения.*

Решенията на задачи 16.1 и 16.2 са директно повторение на основната задача 15.
**16.2** (черт.8) Тук убежните точки са зададени и следователно ще се използват при определяне на колинеационната ос $u = (AU' \cap A'U_\infty)(VU' \cap V'_\infty U_\infty) =$



черт. 8

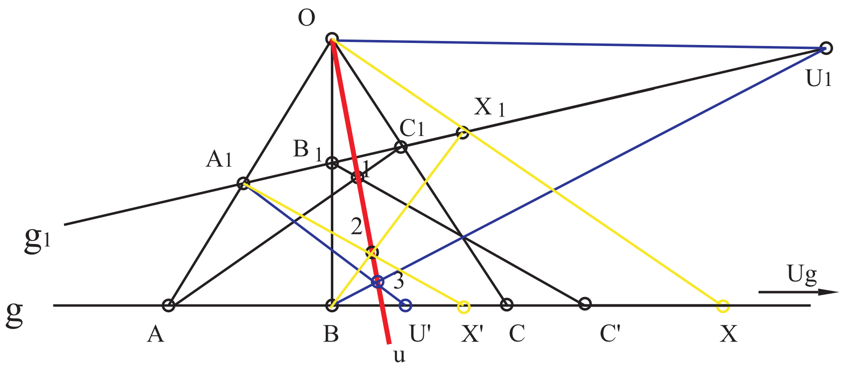
$= 1(VU' \cap \omega) = 1(U_{VU'})$, т.е. $u$ минава през точка 1 и е успоредна на правата $VU'$. Намирането на $X'$ и $Y$ повтаря построенията 2) и 3) от решението на задача 15.

Решенията на задачи 16.3, 16.4 ...16.7 се свеждат до основна задача 15 чрез подходяща последователност от перспективности.
**16.3** (черт.9) Тъй като съществува поне една точка $A$, за която $\varphi^2(A) = \varphi(\varphi(A)) =$

$\varphi(B) = A$ и $B \neq A$, то съгласно Теорема 10.1 $\varphi$ е инволюция.
Чрез една централна перспективност ще сведем тази задача до задача 15. Избираме произволен ред $g_1$ и произволна точка $O$, $O \notin g$, $O \notin g'$ . Нека разгледаме централната перспективност $g \overset{O}{\underset{\pi}{\doublebarwedge}} g_1$, при която $\pi(A, B, C) = A_1, B_1, C_1$. Тогава от схемата

$$\begin{array}{ccc} g & \overset{\varphi}{\longrightarrow} & g' \\ \pi\downarrow & & \\ g_1 & \nearrow\psi & \end{array}$$

е видно, че $\psi = \varphi \circ \pi^{-1}$ е проективност и $\psi(A_1, B_1, C_1) = B, A, C'$. Тогава колинеационната ос $u$ на $\psi$ е: $u = (A_1A \cap BB_1)(A_1C' \cap BC_1) = O1$ и $\psi = \pi_2 \circ \pi_1$, където $g_1 \overset{A_1}{\underset{\pi_1}{\doublebarwedge}} u \overset{B}{\underset{\pi_2}{\doublebarwedge}} g'$. Сега можем да допълваме $\varphi$, защото $\varphi = \psi \circ \pi = \pi_2 \circ \pi_1 \circ \pi$. Така $\varphi(X) = \pi_2 \circ \pi_1 \circ \pi(X) = \pi_2 \circ \pi_1(X_1) = \pi_2(2) = X'$ .



ЧЕРТ.9

Тъй като $\varphi$ е инволюция, то $\varphi = \varphi^{-1}$ и следователно не е нужно да се търси първообраз на точка от $g$. Това обяснява и защо $\varphi$ има само една убежна точка $U' : \varphi(U_\infty) = \psi \circ \pi = \pi_2 \circ \pi_1 \circ \pi(U\infty) = \pi_2 \circ \pi_1(U_1) = \pi_2(3) = U'$.

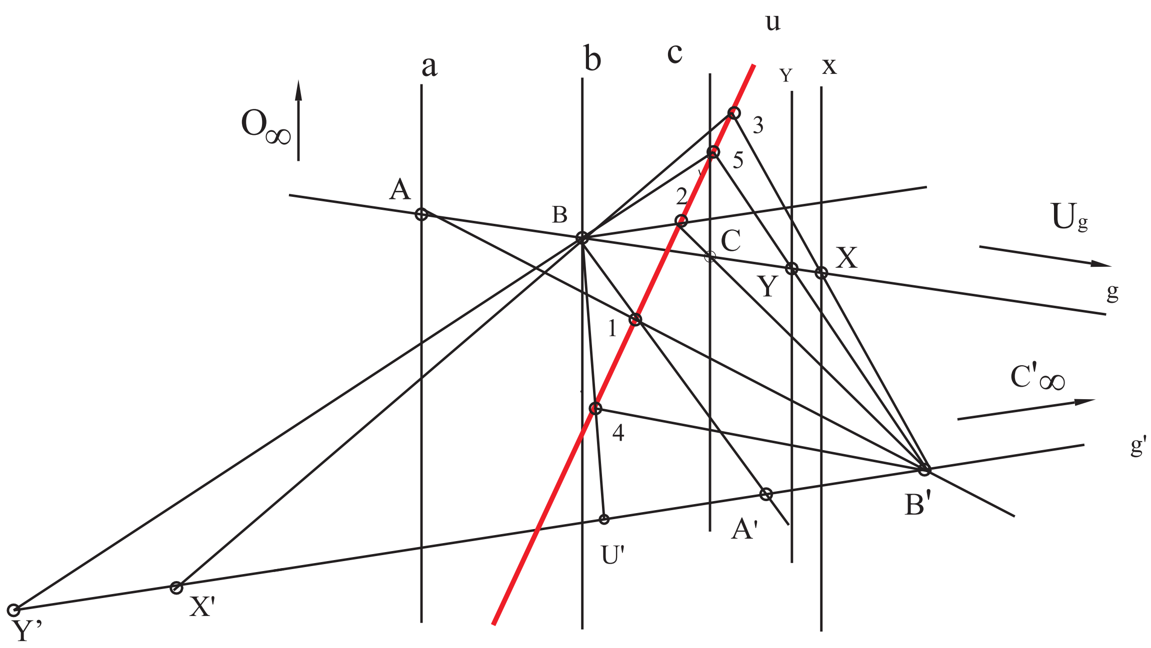
**16.6** (черт.10) Да изберем произволен ред $g \notin S(O_\infty)$ и чрез перспективността $S(O_\infty) \underset{\pi}{\doublebarwedge} g$ да сведем задачата до основната задача 15. Нека $\pi(a, b, c) = A, B, C$. Тогава, както е видно от схемата

$$\begin{array}{ccc} S(O_\infty) & \overset{\varphi}{\longrightarrow} & g' \\ \pi\downarrow & & \\ g & \nearrow\psi & , \end{array}$$

се индуцира проективност $\psi = \varphi \circ \pi^{-1}$, така че $\psi(A, B, C) = A', B', C'_\infty$. Следователно колинеационната ос на $\psi$ е : $u = (AB' \cap A'B)(BC'_\infty \cap B'C) = 12$ и $\psi = \pi_2 \circ \pi_1$, където $g \overset{B'}{\underset{\pi_1}{\doublebarwedge}} u \overset{B}{\underset{\pi_2}{\doublebarwedge}} g'$. Сега можем да допълваме $\varphi$, защото $\varphi = \psi \circ \pi = \pi_2 \circ \pi_1 \circ \pi$ и $\varphi^{-1} = \pi^{-1} \circ \psi^{-1} = \pi^{-1} \circ \pi_1^{-1} \circ \pi_2^{-1}$. Така, ако $x \in S(O_\infty)$ е произволна

права и $Y' \in g'$ е произволна точка, то
$\varphi(x) = \pi_2 \circ \pi_1 \circ \pi(x) = \pi_2 \circ \pi_1(X) = \pi_2(3) = X'$ ,
$\varphi(\omega) = \pi_2 \circ \pi_1 \circ \pi(\omega) = \pi_2 \circ \pi_1(U_g) = \pi_2(4) = U'$ ,
$\varphi^{-1}(Y') = \pi^{-1} \circ \pi_1^{-1} \circ \pi_2^{-1}(Y') = \pi^{-1} \circ \pi_1^{-1}(5) = \pi^{-1}(Y) = y.$

*Нека припомним, че чертаем в евклидовия модел на проективната равнина и за това не можем да начертаем на чертежа безкрайната права $\omega$. В същото време:*
*1) можем да си избираме точки от $\omega$, разбира се безкрайни;*
*2)можем да намираме пресечната точка на $\omega$ с произволна крайна права - това е единствената безкрайна точка, чийто представител е крайната права.*



черт.10

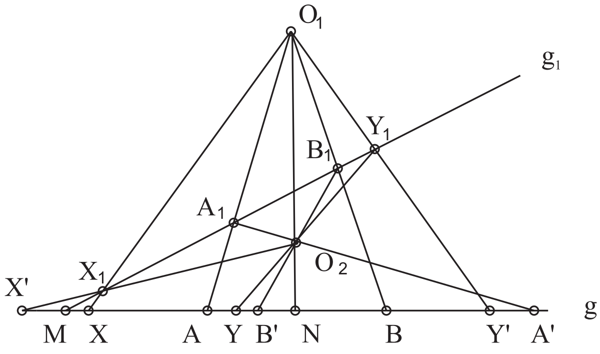
**16.7** Виж §9 - Допълване на проективност , случай 2), на стр. 36, 37 на учебника. Различното в тази задача е съвпадането на центровете на двата снопа прави. Подходът за свеждане на задачата до задача 15, както и ходът на решението са същите.

*Когато проективността $\varphi$ е индуцирана върху един и същи ред и в условието на задачата е зададена поне една двойна точка , то съществува по-лека конструкция за допълване на $\varphi$ от разглежданата до сега. Достатъчно е произволно избраният ред да минава двойната точка.*

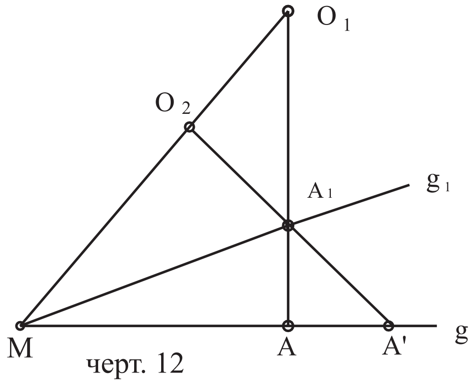
**16.8** (черт.11) Нека изберем произволна права $g \ni M$ и произволна точка $O_1 \notin g$, $O_1 \notin g_1$ и нека $\pi_1(M, A, B,) = M, A_1, B_1$.. Тогава $\varphi$ има представянето $\varphi = \pi_2 \circ \pi_1$, където $g \overset{O_1}{\underset{\pi_1}{\overline{\overline{\wedge}}}} g_1 \overset{O_2}{\underset{\pi_2}{\overline{\overline{\wedge}}}} g$, а $O_2 = A_1A' \cap B_1B'$. Сега записваме :

$\varphi(X) = \pi_2 \circ \pi_1(X) = \pi_2(X_1) = X'$, $\varphi^{-1}(Y') = \pi_1^{-1} \circ \pi_2^1(Y') = \pi_1^{-1}(Y_1) = Y$.
Леко се проверява, че $N = O_1O_2 \cap g$ е втората двойна точка на $\varphi$ .

**16.9** (черт.12) Следвайте хода на решение на задача 16.8. Но сега $O_2 = A_1A' \cap O_1M$, за да няма втора двойна точка.



черт. 11



черт. 12

**16.10** Съгласно Теорема 10.4 и Следствие 10.2 $\varphi$ има втора двойна точка $N$ : $H(AA_1, MN)$. За допълването на $\varphi$ виж задача 10.

**Задача 17.** Нека $\varphi_1$ и $\varphi_2$ са проективности, зададени в реда точки $g$, като и двете са различни от идентитета и са комутативни по между си. Да се докаже, че ако едната от двете проективности е параболична, то и другата е параболична и двете имат общ двоен елемент.

**Решение.** I. Нека $\varphi_1$ е параболичната проективност и нека $\varphi_1(M) = M$. Тъй като $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1$, то ако $\varphi_2 \circ \varphi_1(M) = \varphi_2(M) = M'$, то и $\varphi_1 \circ \varphi_2(M) = \varphi_1(M') = M'$. Понеже $\varphi_1$ е параболична проективност, то $M' = M$. Следователно $\varphi_2(M) = M$, т.е. $\varphi_2$ има поне един двоен елемент и той е $M$.
II. Допускаме, че $\varphi_2$ има втори двоен елемент $N, N \neq M$, т.е. $\varphi_2(N) = N$. Тогава от $\varphi_1 \circ \varphi_2(N) = \varphi_1(N) = N'$, $\varphi_2 \circ \varphi_1(N) = \varphi_2(N') = N'$ и $\varphi_1$ е параболична проективност следва, че $N'$ е трети двоен елемент за $\varphi_2$ . Тогава съгласно Теорема 8.4 $\varphi_2$ съвпада с идентитета , което противоречи на условието. Следователно допускането не е вярно и $\varphi_2$ няма втори двоен елемент, т.е. $\varphi_2$ е параболична проективност.

**Задача 18.** Нека трите страни на един триъгълник минават съответно през три неподвижни колинеарни точки, а два от върховете му се движат съответно по две неподвижни прави. Да се докаже, че третият връх на триъгълника се движи по една права.

**Решение.** Да означим дадените прави с $a$ и $b$, дадените колинеарни точки с $P, Q, R$, а триъгълникът с $ABC$ като $A \in a$, $B \in b$, $AC \ni R$, $AB \ni Q$, $BC \ni P$. Проверете дали следната последователност от осеви перспективности $S(R) \underset{\pi_1}{\overset{a}{\bar{\bar{\wedge}}}} S(Q) \underset{\pi_2}{\overset{b}{\bar{\bar{\wedge}}}} S(P)$ описва $\triangle ABC$. Като използвате Теорема 8.8 докажете, че проективността $\varphi = \pi_1 \circ \pi_2$ е осева перспективност, което означава, че върхът $C$ описва оста на $\varphi$.

**Задача 19.** Даден е $\triangle ABC$ и точките $K$ и $L$, лежащи в равнината на триъгълника. Нека точка $X$ описва правата $BC$, а $KX \cap AB = Y$ и $LX \cap AC = Z$. Да се определи геометричното място на точките, описано от точка $P = KZ \cap LY$.
**Упътване:** Докажете, че произведението на следните осеви перспективности
$S(K) \underset{\pi_1}{\overset{AC}{\bar{\bar{\wedge}}}} S(L) \underset{\pi_2}{\overset{BC}{\bar{\bar{\wedge}}}} S(K) \underset{\pi_3}{\overset{AB}{\bar{\bar{\wedge}}}} S(L)$ е осева перспективност.

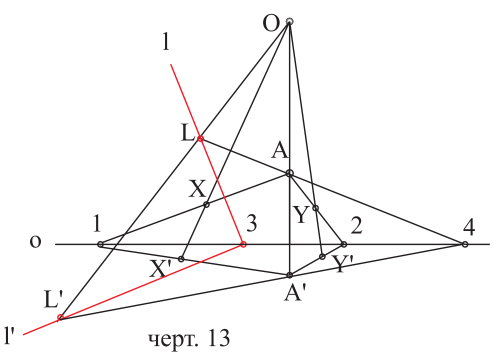
**Решение.** Докажете, че произведението на следните осеви перспективности
$S(K) \underset{\pi_1}{\overset{AC}{\bar{\bar{\wedge}}}} S(L) \underset{\pi_2}{\overset{BC}{\bar{\bar{\wedge}}}} S(K) \underset{\pi_3}{\overset{AB}{\bar{\bar{\wedge}}}} S(L)$ е осева перспективност.

## Хомология

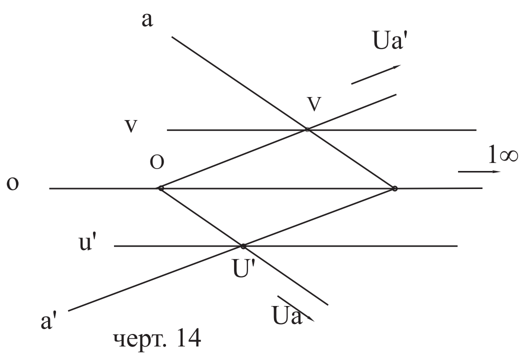
**Задача 20.** Нека точка $O$ и права $o$ са съответно център и ос на хомология $\phi$. За хомологията:
**20.1** $\phi(O, o; A \to A')$;
**20.2** $\phi(O, o; a \to a')$, като $O \in o$;
да се намерят следните точки и прави:
$X' = \phi(X)$, $Y = \phi^{-1}(Y')$, $l' = \phi(l)$, $g = \phi^{-1}(g')$ , където точките $X, Y'$ и правите $l, g'$ са произволно избрани.

**Убежни прави на хомологията** $\phi$ се наричат крайните прави $u'$ и $v$, които са съответно образ и първообраз на безкрайната права $\omega$.

**Решение. 20.1** (черт.13) Нека $X$ е произволна точка. Да намерим точка $X' = \phi(X)$. Съгласно Свойство 3 на хомологията (стр.46, учебника) точка $X' \in OX$. Нека $AX \cap o = 1$ и $\phi(AX) = A'X'$. Тогава съгласно Свойство 4 на хомологията (стр.46, учебника) $1 \in A'X'$. Следователно $X' = OX \cap 1A'$.
Нека $Y'$ е произволна точка. Да намерим точка $Y = \phi^{-1}(Y')$. Отново прилагаме последователно Свойства 3 и 4 на хомологията, съгласно които $Y \in OY'$ и $Y \in 2A$, където $2 = A'Y' \cap 0$. Така получаваме $Y = OY' \cap 2A$.



черт. 13



черт. 14

*За да намерим образа (респ. първообраза) на произволна права е достатъчно да намерим образите (респ. първообразите) на две нейни точки. Удобна е пресечната точка на правата с оста, защото съгласно Свойство 1 (стр.46, учебника) на хомологията, тя е двойна точка.*

Нека $l$ е произволна права. Да намерим правата $l' = \phi(l)$. Нека $l \cap 0 = 3$, а $L \in l$ е произволна точка. Тогава $\phi(l) = \phi(3L) = \phi(3)\phi(L) = 3L'$, където точката $L' = \phi(L)$ е намерена по начина, описан по-горе.

**Задача 21.** Да се построят убежните прави за хомологиите, зададени в задача 20.

**Решение.** (черт.14) Ще намерим убежните прави на специалната хомология $\phi(O, o; a \to a')$ (виж Определение 12.1). Нека $\omega \cap 0 = 1_\infty$, а $U_\infty \in \omega$ е произволна точка. Тогава $\phi(\omega) = \phi(1_\infty U_\infty) = \phi(1_\infty)\phi(U_\infty) = 1U' = u'$. За конкретната задача, когато е зададена двойка съответни прави е много удобно точка $U_\infty$ да не е произволна, а да е безкрайната точка на правата $a$, т.е. $U_a = U_\infty$. Тогава $OU_\infty \cap a' = U'$.
По аналогичен начин построяваме и втората убежна права $v$, която също ще бъде успоредна на $o$, защото минава през двойната точка $1_\infty$. Да запишем по-подробно $v = \phi^{-1}(\omega) = \phi^{-1}(1_\infty U_{a'}) = \phi^{-1}(1_\infty)\phi^{-1}(U_{a'}) = 1_\infty V$, където $V = OU_{a'} \cap a$.

**Задача 22.** Да се намерят центърът и оста на хомологията $\phi$, ако :
**22.1** $\phi(A, B, X) = A', B', X$, където никои три от точките $A, B, A', B', X$ не са колинеарни;
**22.2** $\phi(a, b, x) = a', b', x$, където никои три от правите $a, b, a', b', x$ не са инцидентни с една точка.

**Решение.** Прилагайки директно свойствата на хомологията, намираме:
**22.1** $O = AA' \cap BB'$, $o = (AB \cap A'B')X$;
**22.1** $o = (a \cap a')(b \cap b')$, $O = [(a \cap b)(a' \cap b')] \cap x$.

**Задача 23.** Дадени са точките $O, A, B, A', B' \in m$ и точка $X \notin m$. Да се намерят оста и убежните прави на хомологията $\phi$ с център точка $O$, за която $\phi(A, B, X) = A', B', X$.
Да се формулира и реши дуалната задача.

**Решение.** Построяваме произволна права $c \ni O$. Съгласно Свойство 2 на хомологията $\phi(c) = c$. Тъй като $\phi(AX = a) = A'X = a'$, то $\phi(C = a \cap c) = a' \cap c = C'$. Тогава точката $Y = BC \cap B'C'$ лежи върху оста $o$ на $\phi$ или $o = XY$.

**Задача 24.** Дадени са точките $A, B, A', B' \in m$ и права $o$, неминаваща през никоя от дадените точки. Да се намерят центърът и убежните прави на хомологията $\phi$ с ос правата $o$, за която $\phi(A, B) = A', B'$.
Да се формулира и реши дуалната задача.

**Решение.** Изберете две произволни точки $1, 2 \in o$ и с помощта на правите $A1$, $B2$ и техните образи намерете нова двойка съответни точки за хомологията $\phi$.

**Задача 25.** Дадени са хомология $\phi$ с център $O$ и ос $o$, и правите $p$ и $q$, които не са съответни за $\phi$. Да се намери двойка точки $P$ и $Q$, така че: $\phi(P) = Q,\ P \in p,\ Q \in q$.

**25.1** $\phi(O, o; A \to A')$ е обща хомология, а правите $p$ и $q$ са произволни крайни прави;

**25.2** $\phi(O, o; a \to a')$ е специална хомология, а правите $p$ и $q$ са произволни крайни прави;

**25.3** $\phi(O, o; \omega \to u')$ е обща хомология, а правите $p$ и $q$ са произволни крайни прави;

**25.4** $\phi(O, o; A \to A')$ е обща хомология, а правата $p = \omega$ и $q$ е произволна крайна права;

**25.5** $\phi(O_\infty, o; A \to A')$ е обща афинна хомология, а правите $p$ и $q$ са произволни крайни прави;

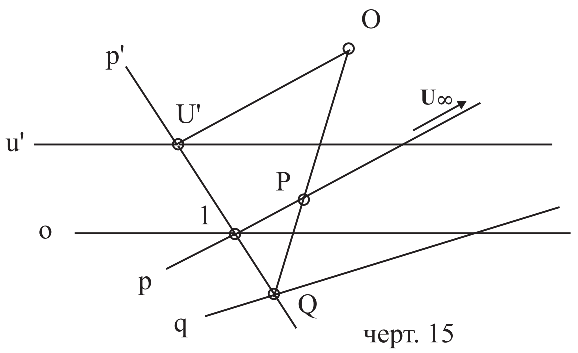
**25.6** $\phi(A, B, X) = A', B', X$, като никои три от дадените точки не са колинеарни, а правата $p = \omega$ и $q$ е произволна крайна права;

**25.7** $\phi(a, b, x) = a', b', x$, като никои три от правите $a, b, x, a', b'$ не минават през една точка, а правите $p$ и $q$ са произволни крайни прави;

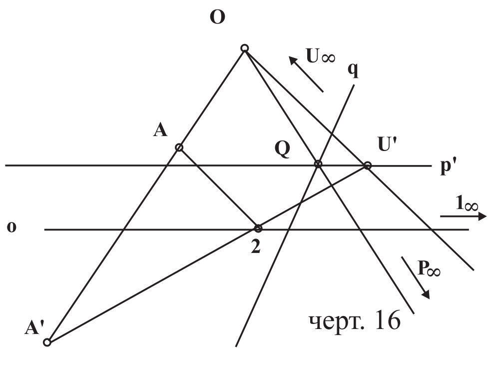
**25.8** $\phi(O, \omega, v) = O, u', \omega$ е хомология с център $O$, а правите $p$ и $q$ са произволни крайни прави.

**Решение.** Намерете правата $p' = \phi(p)$ и тогава $Q = p' \cap q$, а $P = \phi^{-1}(Q) = OQ \cap p$.

**25.3** (черт. 15) Нека $p \cap o = 1$ и $p \cap \omega = U_\infty$. Тъй като $\phi(U_\infty) = OU_\infty \cap u' = U'$, то $\phi(p = 1U_\infty) = \phi(1)\phi(U_\infty) = 1U' = p'$.



черт. 15



черт. 16

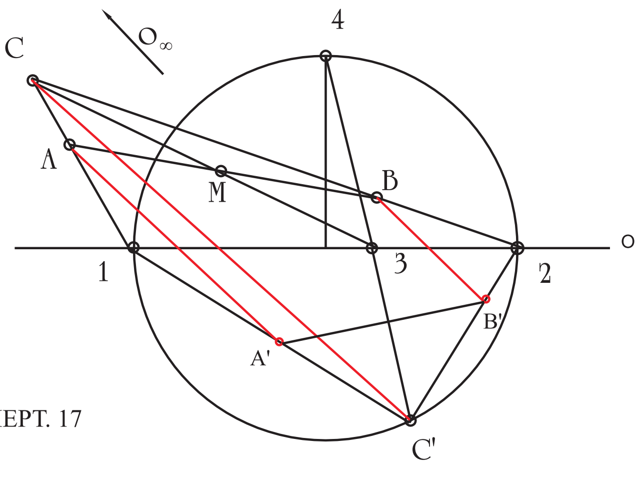
**25.4** (черт. 16) Сега $\phi(p = \omega) = u'$ е убежна права за $\phi$. Нека $\omega \cap o = 1_\infty$, а $U_\infty$ е произволна безкрайна точка. Ако $AU_\infty \cap o = 2$, то $\phi(AU_\infty) = \phi(A)\phi(U_\infty) =$

$A'U' = A'2$. Тогава $U' = OU_\infty \cap A'2$, а $u' = 1_\infty U'$. Следователно $Q = u' \cap q$, а $P_\infty = \omega \cap OQ$.

**Задача 26.0** Дадени са успоредник $ABCD$, точка $P'$ и права $o$, неминаваща през връх на успоредника и през точка $P'$. Намерете афинна хомология с ос правата $o$, която преобразува $ABCD$ в ромб с диагонал $A'C'$, минаващ през точка $P'$. Постройте ромба.

**Задача 26.** Да се намери афинна хомология $\phi$ с дадена крайна ос $o$, която трансформира:
**26.1** Даден триъгълник $ABC$ в равностранен триъгълник;
**26.2** Даден триъгълник $ABC$ в правоъгълен равнобедрен триъгълник;
**26.3** Даден успоредник $ABCD$ в квадрат.

**Решение. 26.2** (черт.17) За да се намери афинната хомология $\phi$, удовлетворяваща условията на задачата, е достатъчно да се намери двойка съответни точки. Нека $\phi(ABC) = A'B'C'$ и $\angle A'C'B' = 90^o$. Следователно ще потърсим точка $C' = \phi(C)$. Да означим: $AC \cap o = 1$, $BC \cap o = 2$. Тогава точка $C'$ принадлежи на геометричното място на точките, от които отсечката 12 се вижда под прав ъгъл, т.е. $C'$ принадлежи на окръжност $k(d = 12)$.
Нека $CM$ е медиана на $\triangle ABC$ и $CM \cap o = 3$. Тогава $\phi(CM) = C'M' = C'3$. Съгласно Теореми 24.4, Теорема 11.3 и Определение 8.1 $C'3$ ще бъде медиана и в $\triangle A'B'C'$. Но тъй като $\triangle A'B'C'$ е равнобедрен, то $C'3$ ще бъде и негова ъглополовяща. Това е възможно, само когато $C'3$ разполвява дъгата $\overset{\frown}{12}$, т.е. $C'3 \ni 4$, където $\overset{\frown}{14} = \overset{\frown}{24}$. Така показахме, че правите $C'3$ и 43 съвпадат или $C' = k \cap 34$. Безкрайната точка $O_\infty = CC' \cap \omega$ е център на търсената афинна хомология. Тогава $A' = AO_\infty \cap 1C'$, $B' = BO_\infty \cap 2C'$.



ЧЕРТ. 17

**Задача 26*.** Да се намери хомология $\phi$, която трансформира даден произволен четириъгълник $ABCD$ в квадрат.

**Решение.**(виж динамичния чертеж) Нека $AD \cap BC = P$ и $AB \cap CD = Q$. Тъй като срещуположните страни на квадрата са успоредни, то $\phi(P,Q) = P^*_\infty, Q^*_\infty$. Следователно $\phi(PQ) = \omega$ или правата $PQ = v$ е убежна права на хомологията $\phi$. Нека още $AC \cap v = R$ и $BD \cap v = S$. Следователно точките $P,Q,R,S$ са убежни за $\phi$.

Да означим с $O$ центърът на $\phi$. Тогава правите $OP, OQ, OR, OS$ ще бъдат представители съответно на безкрайните точки $P^*_\infty, Q^*_\infty, R^*_\infty, S^*_\infty$. Но съседните страни на квадрата както и диагоналите му са перпендикулярни. Това означава $OP \perp OQ$ и $OR \perp OS$. Поради тези съображения определяме центъра $O$ на $\phi$ като пресечна точка на окръжностите $k_1(d = PQ)$ и $k_2(d = RS)$.

Оста на $\phi$ не е еднозначно определена. Всяка права $o$, която е успоредна на убежната права $v$ може да бъде избрана за ос. Нейният избор е свързан с дължината на страната на квадрата.

Ако въведем точките $AD \cap o = 3$, $BC \cap o = 4$, $AB \cap o = 5$, $DC \cap o = 6$, то: $\phi(AD) = \phi(3P) = 3P^*_\infty = a = A^*D^*$, $\phi(BC) = \phi(4P) = 4P^*_\infty = b = B^*C^*$, $\phi(AB) = \phi(5Q) = 5Q^*_\infty = d = A^*B^*$, $\phi(CD) = \phi(6Q) = 6Q^*_\infty = c = C^*D^*$. Така получаваме върховете на квадрата $A^* = a \cap d$, $B^* = b \cap d$, $A^* = a \cap d$, $C^* = c \cap b$, $D^* = a \cap c$. Проверка за точността на построенията е колинеарността на тройките точки $AOA^*$, $BOB^*$, $COC^*$, $DOD^*$.

**Задача 27.** Нека $\phi$ е дадена афинна хомология с ос $o$ и нека $\phi(Q) = Q'$. Да се построи ромб с даден център $Z$, който чрез $\phi$ се изобразява в квадрат с дължина на страната $3cm$.

**Упътване.** Постройте **главните направления на афинната хомология** $\phi$ като използвате двойката съответни точки $Z, Z'$. (задачата е решена в учебника на стр.97-98) Върху двойките перпендикулярни прави, минаващи през $Z$ и $Z'$ ще лежат диагоналите съответно на ромба и на квадрата. Дължината на диагонала на квадрата се определя от условието, че страната му е с дължина 3 см.

**Задача 28.** Да се докаже, че произведението на две хомологии с обща ос е хомология със същата ос и центровете на трите хомологии са колинеарни.
Да се формулира дуалната задача.

**Упътване.** Ако $\phi_1(O_1, o; A \longrightarrow A_1)$ и $\phi_2(O_2, o; A \longrightarrow A_2)$ са дадените хомологии, то достатъчно е да се докаже, че $o$ е двоен ред точки за $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$, а $O_1O_2$ е двойна права за $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$ и да се приложат свойствата на хомологията.

## Конични сечения

**Задача 29.** Докажете, че полярата на всяка външна точка за коничното сечение **C** съединява допирните точки на допирателните прави към **C** през тази точка. Формулирайте дуалното твърдение.

**Решение.** Нека точка $P$ е външна за коничното сечение $\mathbf{C}$. Да означим с $t_1$ и $t_2$ допирателните прави през $P$ към $\mathbf{C}$, а допирните им точки да означим съответно с $T_1$ и $T_2$. Съгласно Определения 15.2, 15.3, 14.3, 14.1 точка $P$ е спрегната с точките $T_1$ и $T_2$ и следователно полярата на $P$ минава през тях.
*Дуално твърдение:* Докажете, че полюсът на всяка секуща за коничното сечение $\mathbf{C}$ е пресечната точка на допирателните прави към $\mathbf{C}$ през пресечните точки на секущата с $\mathbf{C}$.

**Задача 30.** Шестоъгълникът $ABCDEF$ е вписан в коничното сечение $\mathbf{C}$, а правите $a, b, c, d, e, f$ са допирателни към $\mathbf{C}$ във върховете му. Да се докаже, че правата на Паскал за точките $A, B, C, D, E, F$ и точката на Брианшон за правите $a, b, c, d, e, f$ са полюс и поляра относно $\mathbf{C}$ .

**Решение.** Нека $\kappa$ е полярността, породила коничното сечение $\mathbf{C}(\kappa)$. Съгласно Теорема 19.1 правата на Паскал за шестоъгълника $ABCDEF$, вписан в коничното сечение $\mathbf{C}(\kappa)$, е $s = (AB \cap DE)(BC \cap EF) = PQ$. Съгласно Теорема 19.2 точката на Брианшон за шестостранника , описан около коничното сечение $\mathbf{C}(\kappa)$, е $S = [(ab)(de)] \cap [(bc)(ef)] = p \cap q$. Полярността е корелация и съгласно Определение 13.1 можем да запишем : $\kappa(ab) = \kappa(a)\kappa(b) = AB$, $\kappa(de) = \kappa(d)\kappa(e) = DE$, което означава $\kappa(p) = AB \cap DE = P$. Аналогично се доказва $\kappa(q) = Q$. Следователно $\kappa(s) = \kappa(PQ) = \kappa(P)\kappa(Q) = p \cap q = S$.

**Задача 31.** Страните $AB, BC, CA$ на $\triangle ABC$ допират коничното сечение $\mathbf{C}$ съответно в точките $K, L, M$. Докажете, че $\triangle ABC$ и $\triangle LMK$ са перспективни.

**Упътване.** Означете страните на $\triangle ABC : AB = k, BC = l, CA = m$ и приложете Теоремата на Брианшон за правите $kkllmm$. От получения резултат за правите $CK, BM, AL$ и Твърдение $A'_5$ (Теорема на Дезарг за перспективни триъгълници) следва, че $\triangle ABC$ и $\triangle LMK$ са перспективни.

**Задача 31.0** Нека $ABC$ и $A'B'C'$ са перспективни триъгълници. Да се докаже, че пресечните точки на двойките несъответни страни за двата триъгълника принадлежат на една крива от втора степен.

**Задача 31.00** Нека четириъгълникът $ABCD$ е описан около кривата от втора степен $k$, а страните му $AB, BC, CD, DA$ се допират до $k$ съответно в точките $P, L, Q, G$. Да се докаже, че диагоналите $AC, BD$ и съединителните прави на допирните точки на $k$ с двойките срещуположни страни минават през една точка.

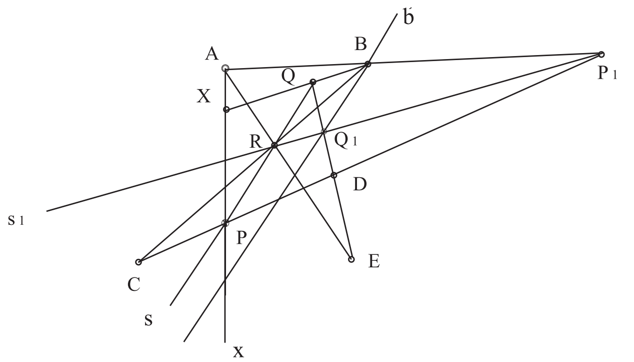
### Приложение на теоремите на Паскал и Брианшон за намиране на шеста точка и шеста права, принадлежащи на коничното сечение.

*Теоремата на Паскал се прилага, когато се търси втората пресечна точка на дадено конично сечение с дадена права, т.е. едната пресечна точка вече е известна.*

**Задача 32.** Нека $\mathbf{k}(ABCDE)$ е крива от втора степен, минаваща през точките

$A, B, C, D, E$, никои три от които не са колинеарни. Да се построят:
**32.1** произволна точка $X \in \mathbf{k}$ ;
**32.2** допирателната $b$ към $\mathbf{k}$ в точката $B$.
Да се формулира и реши дуалната задача.

**Решение 32.1** (черт.18) Нека $x$ е произволна права, минаваща през една от дадените точки, напр. $A$. Търсим втората пресечна точка $X$ на правата $x$ с кривата от втора степен $k(ABCDE)$.
1) Определяме мястото на шестата точка $X : AXBCDE$
В конкретния случай $X$ трябва да стои до точка $A$, защото $X, A \in x$.
2) Прилагаме Теоремата на Паскал : $A, X, B, C, D, E \in k(ABCDE) \iff$
$P = AX \cap CD,\ Q = XB \cap DE,\ R = BC \cap EA$ са колинеарни точки.
3) Построение : 3.1 $P = x \cap CD;$ 3.2 $R;$ 3.3 $s = PR;$ 3.4 $Q = s \cap DE;$
3.5 $X = x \cap BQ = AP \cap BQ$.



черт. 18

*Допирателна права се намира чрез Теоремата на Паскал като два пъти последователно се запише допирната точка.*
**Задача 32.2** Да приемем стандартното означение за допирателната права в точка $B$ - $b$. ( чертежът на зад.32 е общ за двете подусловия)
1) $b : ABBCDE$.
2) $A, B \in b, C, D, E \in \mathbf{C}(ABCDE) \iff P_1 = AB \cap CD,\ Q_1 = BB \cap DE,\ R_1 = BC \cap EA$ са колинеарни точки.
3) Построение : 3.1 $P_1;$ 3.2 $R_1 = R;$ 3.3 $s_1 = P_1R_1;$ 3.4 $Q_1 = s_1 \cap DE;$ 3.5 $b = BQ_1$.

*Дуална задача.* Нека е $K(abcde)$ крива от втори клас , съдържаща правите $a, b, c, d, e$, никои три от които не минават през една точка. Да се построят :
32.1 (д) произволна права $x \in K$ ;
32.2 (д) да се намери допирната точка $B$ на $K$ с $b$.

*Теоремата на Брианшон се прилага, когато се търси втората допирателна на дадено конично сечение през дадена точка, т.е. едната допирателна вече е известна.*

**Задача 32.2 (д)** Да приемем стандартното означение за допирна точка - $B$ на допирателна права $b$.
*Допирна точка се намира чрез Теоремата на Брианшон като два пъти последователно се запише допирателната права.*
1) $B : abbcde$.
2) $a, b \ni B, c, d, e \in \mathbf{C}(abcde) \iff$ правите $p = (ab)(cd),\ q = (bb)(de),\ r = (bc)(ea)$

минават през една точка.
3) Построение : 3.1 $p$; 3.2 $r$; 3.3 $S = p \cap r$; 3.4 $q = S(de)$; 3.5 $B = b \cap q$.
Предлагаме на любознателния читател сам да изпълни чертежите.

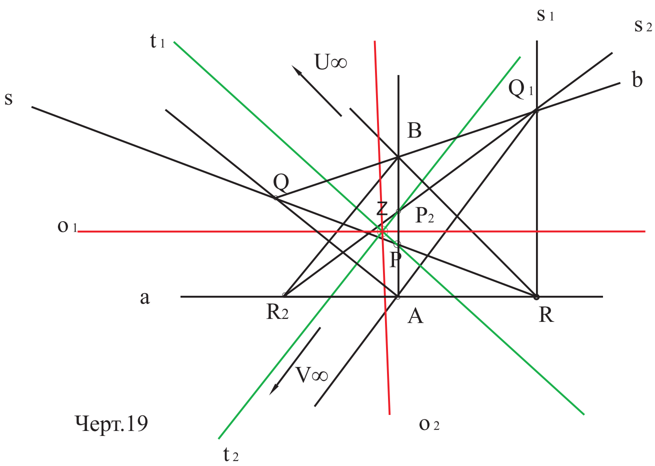
**Задача 33.** Дадени са двата върха $A$ и $B$ на $\triangle ABC$, вписан в кривата от втора степен **k**, допирателните прави $a$ и $b$ към **k** в тези върхове и правата на Паскал (или точката на Брианшон). Да се построи третият връх $C$ на $\triangle ABC$, както и допирателната $c$ към **k** в точка $C$.

**Решение.** Кривата от втора степен **k** е зададена по следния начин : $k(A \in a, B \in b)$ (следваме означенията, въведени в §17 на учебника) и правата на Паскал $s$.
1) Прилагаме Теоремата на Паскал за точките : $AABBCC$.
$A \in a, B \in b, C \in c \in \mathbf{k} \Longleftrightarrow$ точките $P = a \cap BC,\ Q = AB \cap c,\ R = b \cap CA$ лежат върху дадената права на Паскал $s$.
2) Построение : От $P = a \cap s;\ R = b \cap s; \Longrightarrow C = BP \cap AR$ и $c = QC = (AB \cap s)C$.

**Задача 34.** Дадени са четирите върха на петоъгълник, вписан в крива от втора степен и правата на Паскал. Да се намери петият връх на петоъгълника.

**Задача 35.** Да се построят асимптотите и осите на хиперболата **h** :
**35.1** $\mathbf{h}(U_\infty, A \in a, B, C)$;
**35.2** $\mathbf{h}(U_\infty, A \in a, B \in b)$.

**Решение 35.2** ( черт.19) Записът $\mathbf{h}(U_\infty, A \in a, B \in b)$ е еквивалентен на записа $\mathbf{h}(U_\infty, AABB)$. Да означим асимптотите с $t_1$ и $t_2$. Те са допирателни към **h** съответно в точките $U_\infty$ , $V_\infty \in h$.
1) Намираме $t_1$, прилагайки Теоремата на Паскал за точките $(U_\infty U_\infty AABB)$ (виж задача 32.2).
$U_\infty U_\infty AABB \in \mathbf{h} \Longleftrightarrow$ точките $P = t_1 \cap AB,\ Q = U_\infty A \cap b,\ R = a \cap BU_\infty$ са инцидентни с една права $s$. Построение: $P = QR \cap AB,\ t_1 = PU_\infty$.
2) Определяме втората безкрайна точка $V_\infty$ на **h** като втора пресечна точка на безкрайната права $\omega$ с **h**, отново прилагайки Теоремата на Паскал за точките $(U_\infty V_\infty AABB)$ (виж задача 32.1 и отчети $U_\infty V_\infty = \omega,\ \omega \cap AB = U_{AB}$).
$U_\infty V_\infty AABB \in \mathbf{h} \Longleftrightarrow$ точките $P_1 = \omega \cap AB = U_{AB},\ Q_1 = V_\infty A \cap b,\ R_1 = a \cap BU_\infty = R$ са инцидентни с една права $s_1$. Построение: $Q_1 = RU_{AB} \cap b$, $V_\infty = Q_1 A$.
3) Намираме $t_2$, прилагайки Теоремата на Паскал за точките $(V_\infty V_\infty AABB)$ (виж задача 32.2).
$V_\infty V_\infty AABB \in \mathbf{h} \Longleftrightarrow$ точките $P_2 = t_2 \cap AB,\ Q_2 = V_\infty A \cap b = Q_1,\ R_2 = a \cap BV_\infty$ са инцидентни с една права $s_2$. Построение: $P_2 = Q_1 R_2 \cap AB,\ t_2 = P_2 V_\infty$.



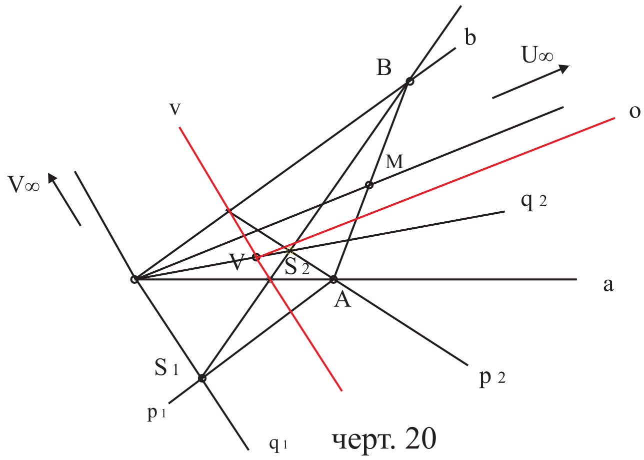
Черт.19

4) Точката $Z = t_1 \cap t_2$ е център на хиперболата. (виж §25, Определения 25.3, 25.7)
5) Осите на хиперболата $o_1$ и $o_2$ са ъглополовящи на ъглите, определени от асимптотите (виж Теорема 27.6).

**Задача 36** Да се построят безкрайната точка, върховата допирателна, върхът и оста на параболата :
**36.1** $\pi(A \in a, B \in b)$.
**36.2** $\pi(a, b, c \in C)$.

**Решение 36.1** (черт. 20) Записът $\pi(A \in a, B \in b)$ е еквивалентен на записа $\pi(aabb\omega)$ (виж Определение 25.2). Да означим с $U_\infty$ безкрайната точка на параболата, с $v$ върховата допирателна, с $o$ оста, а с $V$ върхът ѝ.
1) $U_\infty$ е допирната точка на $\omega$ с $\pi$. Ето защо намираме $U_\infty$, прилагайки Теоремата на Брианшон за правите $aabb\omega\omega$.(виж задача 32.2 (д))
Правите $a, a, b, b, \omega, \omega \in \pi \iff$ правите $p = (aa)(b\omega),\ q = (ab)(\omega\omega),\ r = (bb)(\omega a)$ минават през една точка $S$. Построение :
$p = AU_b,\ r = BU_a,\ S = p \cap r,\ q = (ab)S,\ U_\infty = q \cap \omega = U_q$.

**Забележка.** Описаният по-горе подход за намиране на безкрайната точка на параболата е универсален. За конкретната задача съществува и по-кратък подход, базиращ се на обстоятелството, че всички диаметри на параболата минават през нейния безкраен център, съвпадащ с безкрайната ѝ точка. Следователно достатъчно е да намерим един диаметър на параболата. Съгласно Теореми 16.3, 24.4 и задача 29 полярата на точка $U_{AB}$ е правата $d = (ab)M$, където $M$ е средата на хордата $AB$. Тогава $U_\infty = U_d$. Този подход е приложен на чертежа.



черт. 20

2) Нека означим с $V_\infty$ образа на $U_\infty$ за абсолютната инволюция (виж §26, Определение 26.1). Тогава върховата допирателна $v$ е втората допирателна към $\pi$ (първата е $\omega$) през точка $V_\infty$. Намираме $v$, прилагайки Теоремата на Брианшон за правите $aabb\omega v$.(виж задача 32.2 (д))
Правите $a, a, b, b, \omega, v \in \pi \iff$ правите $p_1 = (aa)(b\omega),\ q_1 = (ab)(\omega v),\ r_1 = (bb)(va)$ минават през една точка $S_1$. Построение :
$p_1 = AU_b = p,\ q_1 = (ab)(\omega v) = (ab)V_\infty,\ S_1 = p_1 \cap q_1,\ r_1 = BS_1,\ v = (r_1 a)V_\infty$.
3) Върхът $V$ е допирната точка на $v$ с $\pi$. $V : aabbvv$
Построение: $p_2 = A(bv),\ r_2 = B(va) = r_1,\ S_2 = p_2 \cap r_2, q_2 = (ab)S_2,\ V = q_2 \cap v$.
4) Оста $o = VU_\infty$.

**Задача 37.** Дадено е конично сечение **C** и точка $Q$. Да се построи полярата на точка $Q$ относно **C**.
**37.1** **C**$(A \in a, B \in b, C)$, а точка $Q$ е крайна;
**37.2** **C**$(U_\infty \in t, B, C, D)$, а точка $Q$ е крайна;
**37.3** **C**$(U_\infty \in \omega, B, C \in c)$, а точка $Q_\infty$ е безкрайна.

**Решение 37.2** Намираме точките $X = BQ \cap$ **C** и $Y = CQ \cap$ **C** (виж задача 32.1 и приложи Теоремата на Паскал последователно за точките $U_\infty U_\infty BXCD$ и $U_\infty U_\infty BYCD$). Прилагайки Теорема 16.5 за пълния четириъгълник $BXYC$, вписан в коничното сечение **C**, построяваме полярата $q = (BY \cap CX)(BC \cap XY)$ на точка $Q$.

**Решение 37.3** **C** е парабола, тъй като по условие безкрайната права $\omega$ е допирателна. Намираме точката $X = BQ_\infty \cap$ **C**, прилагайки теоремата на Паскал за точките $U_\infty U_\infty BXCC$ и нека точка $M$ е средата на отсечката $BX$. От $H(BX, MQ_\infty)$ и задача 29 следва, че полярата на $Q_\infty$ е правата $q = U_\infty M$, която е и диаметър на **C**.

**Задача 38.** Дадени са неколинеарните точки $A, B, P$, правата $a$, минаваща през точката $A$ и правата $p$, неинцидентна с никоя от дадените точки. Да се намери конично сечение, съдържащо точките $A$, $B$, което се допира да правата $a$ в точка $A$ и спрямо което точка $P$ и права $p$ са полюс и поляра.

**Решение**(черт. ) Достатъчно е да се определят още две точки от това конично сечение, като се използват хармоничните свойства на полюса и полярата (Теорема 16.3) и Основната задача на §4. Нека $AP \cap p = Q$. Търсим точка $C$ , така че $H(PQ, AC)$. Достатъчно е да построим произволна права $g$ , за да получим $\triangle 123$, където $1 = g \cap a$, $2 = g \cap p$, $3 = p \cap a$. Тогава, ако $4 = 3P \cap 1Q$, то чрез пълния четириъгълник 1234 получаваме точката $C = AP \cap 24$, която принадлежи на коничното сечение. Правата $c = 3C$ е допирателната в точка $C$.

**Задача 39.** Дадено е конично сечение **C**. Да се построи центърът на **C**, ако:
**39.1** $\mathbf{C}(A \in a, B, C, D)$;
**39.2** $\mathbf{C}(A \in a, U_\infty \in t, B)$;
**39.3** $\mathbf{C}(A \in a, B; P_\infty, p)$, където точка $P_\infty$ и права $p$ са полюс и поляра относно коничното сечение **C**;
**39.4** $\mathbf{C}(a, b, c, d)$ е парабола.
Да се зададе инволюцията на спрегнатите диаметри за централното конично сечение **C** от **39.1**, **39.2**, **39.3**.

**Упътване .** *Съгласно Определение 25.3 полюсът на безкрайната права относно коничното сечение се нарича негов център. Да приемем означението $Z$ за центъра. Вземайки предвид Определение 14.2, Теорема 14.2 и §16, разбираме, че за да намерим центъра е достатъчно да намерим полярите на две безкрайни точки (виж задача 37) , т.е. да намерим два диаметъра. Тяхната пресечна точка е центърът. Построенията се намаляват с подходящ избор на безкрайните точки. Например, удобно е да се избере безкрайната точка на известна хорда на коничното сечение или безкрайната точка на допирателна в зададена негова точка.*
*Нека с $\varphi$ означим инволюцията на спрегнатите диаметри, индуцирана в центъра на коничното сечение.*

**Задача 39.1** $\mathbf{C}(AABCD)$;
Търсим полярите $d_1$ и $d_2$ съответно на точките $U_{AB}$ и $U_{BC}$:
1) $CU_{AB} \cap \mathbf{C} = X$, $AU_{BC} \cap \mathbf{C} = Y$ (за определянето на точките $X$ и $Y$ прилагаме Теоремата на Паскал съответно за точките $AABXCD$ и $AAYBCD$).
2) Ако означим с $1, 2, 3, 4$ средите съответно на хордите $AB, CX, BC, AY$, то $d_1 = 12$, $d_2 = 34$.
Тогава $Z = d_1 \cap d_2$ и ако $\varphi(d_1, d_2) = d_1', d_2'$, то $d_1' = ZU_{AB}$, $d_2' = ZU_{BC}$.

**Задача 39.2** $\mathbf{C}(AAU_\infty U_\infty B)$;
Тъй като асимптотите са диаметри (виж Определение 25.7), то достатъчно е да намерим още само един диаметър $d$, например - полярата на точка $U_a$. Нека $BU_a \cap \mathbf{C} = X$. Намираме точката $X$, прилагайки теоремата на Паскал за точките $AAU_\infty U_\infty BX$. Нека точка 1 е определена от хармоничната група $H(BX, 1U_a)$, т.е. точка 1 е средата на хордата $BX$ (Теорема 24.4). Тогава $d = 1A$, а $Z = t \cap d$ и $\varphi(t, d) = t, d'$, където $d' = ZU_a$. Втората асимптота $t_2$ се определя от

хармоничната група $H(dd', tt_2)$.

**Забележка.** Друго решение на задачата съдържа намиране на втората асимптота $t_2$ на дадената хипербола (виж решението на задача 35.2). Тогава $Z = t \cap t_2$, а инволюцията $\varphi$ е напълно определена с двойните си елементи $\varphi(t, t_2) = t, t_2$, защото $\varphi$ е $h-$изображение (Следствие 10.2).

**Задача 39.3** $\mathbf{C}(AAB; P_\infty, p)$, където точка $P_\infty$ и права $p$ са полюс и поляра относно коничното сечение $\mathbf{C}$;
1) Да намерим 5 точки от коничното сечение. Нека $AP_\infty \cap \mathbf{C} = C$ и $AP_\infty \cap p = Q$. От $H(AC, QP_\infty)$ и Теорема 24.4 следва, че точка $Q$ е среда на хордата $AC$. Така лесно намираме точка $C$. Ако $a \cap p = L$, то $c = LC$ е допирателната към $\mathbf{C}$ в точка $C$ и можем да запишем $\mathbf{C}(AABCC)$.
2) Дадената права $p$ е диаметър, тъй като е поляра на безкрайна точка. Достатъчно е да намерим още един диаметър на $\mathbf{C}$ (виж задача 39.1).

**Задача 39.4** $\mathbf{C}(abcd\omega)$ .
Центърът на параболата съвпада с безкрайната ѝ точка, която се намира чрез прилагане на Теоремата на Брианшон за правите $abcd\omega\omega$ (виж задача 36).