

Пловдивски университет “Паисий Хилендарски”
конкурсен изпит по математика – 4 юни 2011
Тема 3

Част I. Отбележете с **X** буквата на единствения верен отговор на задачи 1-12.

Поправка се допуска само чрез ✖. За всеки верен отговор: 1 т.; иначе: 0 т.

1. Лицето на триъгълник със страни $AC=4$, $BC=5$ и ъглополовяща $CL = \frac{10}{3}$ е:

- A) $\frac{15\sqrt{7}}{2}$ Б) друг отговор В) $\frac{15\sqrt{7}}{4}$ Г) $\frac{15\sqrt{14}}{2}$

2. Ако x_1 и x_2 са корени на квадратното уравнение $3x^2 + x - 6 = 0$, стойността на израза $x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{9}$ е:

- A) -4 Б) 4 В) $11\frac{1}{9}$ Г) 0

3. Стойността на израза $\frac{1-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$ е:

- A) $-\sqrt{3}$ Б) -1 В) $-\frac{1}{2}$ Г) 1

4. Ако $f(x) = \sin x + \cos x$, стойността на израза $f(\frac{\pi}{3}) - f'(\frac{\pi}{3})$ е:

- A) 0 Б) $\sqrt{3}$ В) $-\sqrt{3}$ Г) $\sqrt{2}$

5. Големият диагонал на ромб със страна $\sqrt{5}$ и лице 4 е:

- A) 4 Б) 2 В) $\sqrt{6}$ Г) 6

6. Границата $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{1 - x^2}$ е:

- A) -1 Б) $-\infty$ В) $-\frac{1}{2}$ Г) $\frac{1}{2}$

7. Ако радиусът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност $R = \sqrt{3}$, $\angle A = 45^\circ$ и $\cos(\angle B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, дължината на страната AB е:

- A) $\sqrt{6}$ Б) $2\sqrt{2}$ В) $\frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$ Г) $2+\sqrt{2}$

8. Сумата S_3 на първите три члена на аритметична прогресия, за която $a_2 = -1$ е:

- A) 2 Б) -3 В) не може да се каже Г) -2

9. Ако $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{5}{4}$, стойността на $\sin 2\alpha$ е:

- A) $\frac{1}{4}$ Б) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ В) не може да се каже Г) $\frac{9}{16}$

10. Решението на уравнението $\frac{1}{x+5} - \frac{6x+18}{(x+5)(x-7)} = 1$ е:

- А) $x = 2$ Б) $x = 2; -5$ В) $x = 2; -5; 7$ Г) друг отговор

11. Триъгълник със страни $AC = 8$, $BC = 7$ и $\cos(\angle ABC) = 1/7$ има периметър:

- А) $6\sqrt{3}$ Б) $15 + \sqrt{97}$ В) $3\sqrt{6}$ Г) 20

12. Решението на неравенството $\log_2(x-1)^2 \leq 2 \log_4(2x+4) - \log_{\frac{1}{2}}(x+3)$ е:

- А) $[-1, \infty)$ Б) $[-1, 1) \cup (1, \infty)$ В) $(-\infty, -1] \cup [-1, 1) \cup (1, \infty)$ Г) $(-\infty, -1] \cup [-1, \infty)$

Част II. Отговорите на задачи 13-17 попълнете в съответните празни рамки. За всеки верен отговор по 2 точки, иначе 0 точки.

13. Да се реши системата
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 13 \end{cases}$$
 .

14. Височината дели хипотенузата на правоъгълен триъгълник с лице $\frac{\sqrt{3}}{2}$ в отношение 1:3. Намерете радиуса на описаната окръжност.

15. Да се реши $\cos 2\alpha + 8 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1$ в интервала $[\pi, 2\pi]$.

16. Намерете разликата между най-голямата и най-малка стойност на функцията $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + kx + 13$ в интервала $[0, 3]$, ако $f(1) = 0$.

17. Да се реши уравнението $3^{x-1} + \frac{9^x}{2} = \frac{1}{6}$.

Част III. Разпишете на отделен лист подробно и обосновано решенията на задачи 18, 19 и 20. Максималният брой точки за всяка от задачите е 6.

18. Околните стени на триъгълна пирамида сключват равни ъгли с основата, която е равнобедрен правоъгълен триъгълник. Да се намери радиуса на вписаната в основата окръжност, ако обемът на пирамидата е $9 + 6\sqrt{2}$, а околната ѝ повърхнина се отнася към пълната както 2:3.

19. Намерете стойностите на реалния параметър m , при които неравенството $\frac{2x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 1} < m$ е изпълнено за всяко реално x .

20. В равнобедрен трапец $ABCD$ ($AB > CD$) е вписана окръжност. Диагоналът и средната отсечка имат дължини съответно равни на $\sqrt{41}$ и 5. Намерете лицето на трапеца и косинуса на $\angle ACB$.

Пожелаваме Ви ползотворна работа и успешно представяне!