

ПРИЛОЖЕНИЕ НА ТЕОРЕМАТА НА NIVEN ПРИ ЗАДАЧИ ОТ УЧИЛИЩНИЯ КУРС ПО МАТЕМАТИКА

Донка Пашкулева

РЕЗЮМЕ

В настоящата статия се разглеждат някои методи за доказване ирационалността на числата $\sqrt{2}$, \sqrt{N} , $\sqrt[3]{N}$ и на някои тригонометрични стойности. Доказателствата са дадени с достъпни за учениците средства.

Ключови думи: ирационално число, тригонометрични стойности.

Ще започнем с ирационалността на някои тригонометрични стойности. Най-напред ще дадем едно елементарно доказателство на теоремата на Niven (Niven, 1956).

Теорема на Niven. Ако θ е рационално в градуси, тогава:

- а) $\cos \theta = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$ или е ирационално;
- б) $\sin \theta = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$ или е ирационално;
- в) $\operatorname{tg} \theta = 0, \pm 1$, е неопределено или е ирационално.

Най-напред ще докажем следната лема.

Лема 1. Ако съществува цяло положително n , такава че $\cos n\theta$ е цяло, тогава $\cos \theta = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$ или е ирационално.

Доказателство. От тъждеството

$$2\cos(n+1)\theta = (2\cos\theta) \cdot 2\cos n\theta - 2\cos(n-1)\theta$$

следва по индукция спрямо n , че съществува полином с коефициент 1 пред най-високата степен с цели коефициенти, такъв че $2\cos n\theta = f(2\cos\theta)$. Така, ако $\cos n\theta$ е цяло, $2\cos\theta$ е корен на полином с коефициент 1 пред най-високата степен $f(x) - 2\cos n\theta$. Следователно $2\cos\theta$ е цяло или ирационално. Тъй като $|2\cos\theta| \leq 2$, лемата е доказана.

Доказателство на теоремата на Niven. Ако θ е рационално в градуси, тогава за подходящи цели числа a и $b > 0$ имаме $\theta = \pi \frac{a}{b}$ в радиани. Тогава $\cos n\theta$, $\cos n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ и $\cos n(2\theta)$ са цели за $n = b$. Сега а) следва директно от Лема 1, а б) и в) следват от Лема 1 и тъждествата $\sin \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ и $\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$. Последното тъждество означава, че ако $\operatorname{tg} \theta$ е рационално, то и $\cos 2\theta$ е рационално.

Да приложим теоремата на Niven за $\theta = 45^\circ$. Тогава понеже $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, следва че $\sqrt{2}$ е ирационално.

Има доста различни доказателства, че $\sqrt{2}$ е ирационално. Например (Gauntt, 1956), (Halfar, 1955) и други. Тук ще дадем едно доказателство за ирационалността на $\sqrt{2}$, което после ще обобщим и за \sqrt{N} и $\sqrt[n]{N}$.

Доказателство, че $\sqrt{2}$ е ирационално. Допускаме, че $\sqrt{2}$ е рационално. Тогава $\sqrt{2}$ може да се представи във вида

$$(1) \quad \sqrt{2} = \frac{a}{b},$$

където a и b са цели положителни. Да предположим, че b е най-малкото цяло число, за което е валидно представянето (1). От факта, че $\sqrt{2}$ е между 1 и 2 и от (1) следва

$$(2) \quad 1 < \frac{a}{b} < 2, \quad b < a < 2b, \quad 0 < a - b < b.$$

От (1) получаваме

$$(3) \quad a^2 = 2b^2, \quad a^2 - ab = 2b^2 - ab, \quad a(a - b) = b(2b - a), \quad \sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{2b - a}{a - b}.$$

Така изразихме $\sqrt{2}$ по друг начин като частно с положителен знаменател $a - b$, който е по-малък от b , което е противоречие с предположението, че b е най-малкият знаменател в представянето (1). Следователно $\sqrt{2}$ е ирационално.

Ще разширим сега това доказателство и ще докажем, че \sqrt{N} е ирационално, при условие че N не е точен квадрат.

Доказателство, че \sqrt{N} е ирационално, когато N не е точен квадрат и е цяло положително.

Понеже \sqrt{N} е между две цели положителни числа, можем да запишем

$$t < \sqrt{N} < t+1.$$

Допускаме, че \sqrt{N} е рационално. Тогава $\sqrt{N} = \frac{a}{b}$, където b е цяло положително и най-малкото възможно такова. Тогава

$$\begin{aligned} t < \frac{a}{b} < t+1, \quad tb < a < tb+b, \quad 0 < a-tb < b, \\ a^2 = Nb^2, \quad a^2 - tab = Nb^2 - tab, \quad a(a-tb) = b(Nb-ta), \\ \sqrt{N} = \frac{a}{b} = \frac{Nb-ta}{a-tb}. \end{aligned}$$

Следователно \sqrt{N} е изразено по друг начин като частно на две рационални числа с положителен знаменател $a-tb$, по-малък от b , противно на допускането, че b е най-малкото възможно. Следователно \sqrt{N} е ирационално.

За да докажем, че $\sqrt[m]{N}$ е ирационално, ще направим някои предварителни бележки.

Нека α е рационално число и $\alpha = \frac{a}{b}$ е представянето на α като частно на две цели числа с минимално цяло положително b в знаменател. Тогава b е най-малкото цяло положително, такова че $b\alpha$ е цяло. За да обобщим доказателствата за $\sqrt[m]{N}$, ще използваме теоремата за деление: Нека a и b са цели положителни. Тогава съществуват цели q и r , такива че

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b.$$

Лема 2. Нека α е рационално и нека b е най-малкото цяло положително, такова че $b\alpha$ е цяло. Означаваме $b\alpha = a$. За кое да е неотрицателно m , ако s е най-малкото положително число, такова че $sa^m\alpha$ е цяло, то $s = b$.

Доказателство. Ще използваме индукция спрямо m . Отбелязваме, че е вярно за $m=0$. Допускаме, че b е най-малкото цяло положително, такова че $ba^m\alpha$ е цяло и ще докажем, че $s = b$.

Отбелязваме, че $s \leq b$, тъй като $ba^{m+1}\alpha$ е цяло.

Прилагайки теоремата за деление към $sa^{m+1}\alpha$ и b , то съществуват цели q и r , такива че

$$sa^{m+1}\alpha = bq + r, \quad 0 \leq r < b.$$

Тогава

$$(4) \quad r\alpha = (sa^{m+1} - bq)\alpha = sa^{m+1}\alpha - aq.$$

Така $r\alpha$ е цяло и $r=0$ от минималното свойство на b . Следователно (4) се свежда до

$$0 = sa^{m+1}\alpha - aq, \quad sa^m\alpha = q,$$

т.е. $s \geq b$ от индукционното допускане и следователно $s = b$.

Теорема. Нека n и N са цели положителни и по-големи от 1, такива че $\sqrt[n]{N}$ не е цяло. Тогава $\sqrt[n]{N}$ е ирационално.

Доказателство. Нека

$$(5) \quad t < \sqrt[n]{N} < t+1.$$

Допускаме, че $\sqrt[n]{N}$ е рационално и нека b е най-малкото цяло положително, такова че $b\sqrt[n]{N}$ е цяло. Означаваме $b\sqrt[n]{N} = a$.

Тогава от (5) получаваме

$$(6) \quad t < \frac{a}{b} < t+1, \quad tb < a < tb+b, \quad 0 < a-tb < b.$$

Забелязваме, че

$$(a-tb)a^{n-2}\alpha = a^{n-1}\alpha - ta^{n-2}b\alpha = b^{n-1}N - ta^{n-1}$$

е цяло. Но предвид на последната част на (6), това противоречи на Лема 2, където $m = n-2$.

Следователно $\sqrt[n]{N}$ е ирационално.

Заключителни бележки:

Дадените в статията доказателства са с достъпни за учениците средства и могат да се използват в училищния курс по математика.

ЛИТЕРАТУРА

GAUNTT, G. (1956) The Irrationality of $\sqrt{2}$. *Amer. Math. Monthly*, 63, 245–247.

HALFAR, E. (1955) The Irrationality of $\sqrt{2}$. *Amer. Math. Monthly*, 62, 435–437.

NIVEN, I. (1956) Irrational Numbers. *Carus Math. Mon.*, 11, 40–41.

Благодарности: Изказвам благодарност на проф. д-р Сава Гроздев за ценните препоръки, които ми даде при написването на тази статия.

**APPLICATION OF THE THEOREM OF
NIVEN IN PROBLEMS FROM THE SCHOOL
COURSE IN MATHEMATICS**

Donka Pashkouleva

ABSTRACT

Some methods about proving the irrationality of the numbers $\sqrt{2}$, \sqrt{N} , $\sqrt[3]{N}$ and some trigonometric numbers are considered in the following article.

Keywords: irrational numbers, trigonometric numbers.

Donka Pashkouleva
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Sofia 1113, Acad. G. Bonchev Str., Block 8
donka_zh_vasileva@abv.bg