

НАУКАТА, ОБРАЗОВАНИЕТО И ВРЕМЕТО КАТО ГРИЖА
Юбилейната научна конференция с международно участие
Смолян, 30 ноември – 1 декември, 2007 г.

**ЧИСЛЕНО РЕШАВАНЕ НА КЛАС ГРАНИЧНИ ЗАДАЧИ
ЗА СИСТЕМИ ОДУ С ПРИЛОЖЕНИЕ ВЪВ ФИЗИКАТА
НА ДЖОЗЕФСОНОВИТЕ КОНТАКТИ**

ст. ас. Христо Мелемов
ПУ "Паисий Хилендарски" – Филиал Смолян
проф. дфмн Тодор Бояджиев
СУ "Климент Охридски" & ОИЯИ, Дубна, Русия

**NUMERICAL SOLUTION OF A CLASS OF BOUNDARY VALUE
PROBLEMS ARISING IN THE PHYSICS OF JOSEPHSON JUNCTIONS**

Ass. Hristo Melemov
PU "Paisii Hilendarski" – Branch Smolyan
Prof. Todor Boyadjiev, ScD
SU "Kliment Ohridski" & JINR – Dubna, Russia.

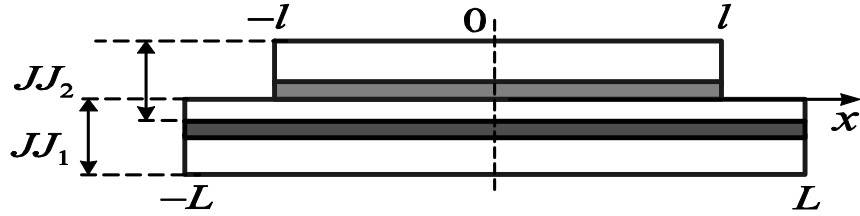
Abstract

In this paper a program for numerical solution of boundary value problems for ODE systems given on the embedded intervals is described. Similar ODE's take place in physics of stacked Josephson junctions with different lengths of the layers. Two cases of such junctions - geometrically symmetric and asymmetric, are considered.

Основната задача на настоящата работа е създаване на програма за числено решаване на гранични задачи за нелинейни системи ОДУ, уравненията в които са зададени върху вложени интервали на изменение на независимата променлива. Подобни системи уравнения намират приложение, например, във физиката на многослойните джозефсонови контакти [1, 2] с нееднаква дължина на слоевете. Ще разгледаме два случая на такива контакти – симетричен и асиметричен.

Математическият модел на симетричния случай на двуслоен джозефсонов контакт с нееднаква дължина на слоевете представлява гранична задача за система ОДУ от следния вид: на интервалите $x \in (-L, -l)$ и $x \in (l, L)$ имаме едно ОДУ за функцията $\varphi_1(x)$, а за интервала $x \in (-l, l)$ имаме система ОДУ за функциите $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$.

На следващата схема демонстрираме принципната схема на симетричен джозефсонов контакт с нееднаква дължина на слоевете. С белите правоъгълници изобразяваме свръхпроводящите електроди, а със заштрихованите – диелектричните бариерни слоеве. Разликата в дължините на слоевете може да се дължи, например, на технологични затруднения.



Може да се покаже, че магнитните потоци $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ на слоевете удовлетворяват следната гранична задача:

$$\varphi_1'(-L) = h_e \quad (1.1)$$

$$-\varphi_1'' + \sin \varphi_1 - \gamma = 0, x \in (-L, -l) \quad (1.2)$$

$$-s\varphi_1'(-l) + \varphi_2'(-l) = (1-s)h_e \quad (1.3)$$

$$-A\varphi'' + J_z(\varphi) + \Gamma = 0, x \in (-l, l) \quad (1.4)$$

$$-s\varphi_1'(l) + \varphi_2'(l) = (1-s)h_e \quad (1.5)$$

$$-\varphi_1'' + \sin \varphi_1 - \gamma = 0, x \in (l, L) \quad (1.6)$$

$$\varphi_1'(L) = h_e \quad (1.7)$$

Тук s е коефициент на индуктивната връзка между слоевете, γ – външният ток по вертикалата, а h_e – външното магнитно поле, имащо направление, перпендикулярно на рисунката. Квадратната матрица A има следния вид:

$$A(s) = \frac{1}{1-s^2} \begin{pmatrix} 1 & -s \\ -s & 1 \end{pmatrix},$$

а векторът на джозефсоновия ток е $J_z(\varphi) = (\sin \varphi_1, \rho \sin \varphi_2)^T$, където параметърът $\rho = \frac{L}{l} \geq 1$. Всички величини са написани в безразмерен вид.

Уравненията (1.1) и (1.7) са гранични условия за дългия контакт, т.е. за функцията $\varphi_1(x)$, съответно (1.3) и (1.5) са гранични условия за късия контакт – $\varphi_2(x)$, отчитайки взаимодействието на дългия контакт. Функцията $\varphi_1(x)$ е непрекъсната заедно с първата си производна в точките $x = \pm l$.

Принципната разлика в свойствата на системата (1.1) - (1.7) от случая на равни дължини ($l = L$) е във възможното нарушаване на гладкостта на решенията в двете точки $\pm l$, произтичащо от двете условия (1.3) и (1.5).

Математическият модел на асиметричния случай представлява гранична задача за система ОДУ от следния вид: на интервала $x \in (0, l)$ имаме система

ОДУ за функциите $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, а за интервала $x \in (l, L)$ имаме едно ОДУ за функцията $\varphi_1(x)$. Магнитните потоци $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ на слоевете удовлетворяват следната гранична задача:

$$\begin{aligned}\varphi_1'(0) &= h_e, \\ \varphi_2'(0) &= h_e, \\ -A\varphi'' + J_z(\varphi) + \Gamma &= 0, \quad x \in (0, l), \\ -s\varphi_1'(l) + \varphi_2'(l) &= (1-s)h_e, \\ -\varphi_1'' + \sin \varphi_1 - \gamma &= 0, \quad x \in (l, L), \\ \varphi_1'(L) &= h_e.\end{aligned}$$

В този случай, за разлика от симетричния, е възможно нарушаване на гладкостта на решенията само в точката $x = l$.

Достатъчно ефективен метод за решаване на такъв тип задачи е НАМН (непрекъснат аналог на метода на Нютон). Този метод е предложен от Гавурин [3] и намира приложение при решаването на широк клас нелинейни физични задачи [4]. В крайна сметка НАМН представлява итерационен метод, на всяка стъпка на който се решава линейна гранична задача. От алгоритмична гледна точка основното отличие на НАМН от традиционния метод на Нютон [5] е във възможността за управление на итерациите посредством параметър, избиран така, че невязката на всяка итерация да бъде минимална (виж подробности в [4]).

В симетричния случай при прилагането на НАМН линеаризираната задача има следния вид:

$$y_1'(-L) = -\varphi_1'(-L) + h_e \quad (2.1)$$

$$-y_1'' + \cos \varphi_1 y_1 = \varphi_1'' - \sin \varphi_1 + \gamma, \quad x \in (-L, -l) \quad (2.2)$$

$$-s y_1'(-l) + y_2'(-l) = s\varphi_1'(-l) - \varphi_2'(-l) + (1-s)h_e \quad (2.3)$$

$$-A(x)y'' + Q(x)y = A\varphi'' - J_z(\varphi) - \Gamma, \quad x \in (-l, l) \quad (2.4)$$

$$-s y_1'(l) + y_2'(l) = s\varphi_1'(l) - \varphi_2'(l) + (1-s)h_e \quad (2.5)$$

$$-y_1'' + \cos \varphi_1 y_1 = \varphi_1'' - \sin \varphi_1 + \gamma, \quad x \in (l, L) \quad (2.6)$$

$$y_1'(L) = -\varphi_1'(L) + h_e \quad (2.7)$$

Линеаризираната задача за асиметричния случай има вида:

$$\begin{aligned} y_1'(0) &= -\phi_1'(0) + h_e, \\ y_2'(0) &= -\phi_2'(0) + h_e, \\ -A(x)y'' + Q(x)y &= A\phi'' - J_z(\phi) - \Gamma, \quad x \in (0, l), \\ -sy_1'(l) + y_2'(l) &= s\phi_1'(l) - \phi_2'(l) + (1-s)h_e, \\ -y_1'' + \cos \phi_1 y_1 &= \phi_1'' - \sin \phi_1 + \gamma, \quad x \in (l, L), \\ y_1'(L) &= -\phi_1'(L) + h_e. \end{aligned}$$

Коефициентите на линеаризираните задачи са сложни функции на независимата променлива, така че аналитичното им решаване е възможно само в изключителни случаи. В настоящата работа за численото решаване на линеаризираната задача прилагаме метода на сплайн-колокацията [6].

За краткост по-нататък при изложението на числения алгоритъм разглеждаме само случая на симетричен двуслоен ДК.

Въвеждаме в интервала $[-L, L]$ мрежа

$$\{x_{i+1} = x_i + h_i, i = 1, 2, \dots, N-1, x_1 = -L, x_r = -l, x_k = l, x_N = L\}$$

от N взела в дефиниционния интервал с променлива стъпка h_i в общия случай. Трябва да отбележим, че точките $x = \pm l$ са взети на мрежата. На всеки подинтервал $[x_i, x_{i+1}] \subset (-L, -l) \cup (l, L)$ приближеното решение се търси във вид на кубичен ермитов сплайн, който има следния вид:

$$S_1(x) = \Phi(t)u_{1,i} + \Psi(t)h_i m_{1,i} + \bar{\Phi}(t)u_{1,i+1} + \bar{\Psi}(t)h_i m_{1,i+1}$$

Чрез $t = (x - x_i)/h_i, t \in [0, 1]$ е означена локалната координата, (u_i, m_i) са стойностите на сплайна $S_1(x)$ и неговата производна $m(x) = S_1'(x)$ във възлите $i = 1, \dots, k$ и $i = r, \dots, n$. Базисните функции $\Phi(x) = (1-t)^2(1+2t)$ и $\Psi(t) = t(1-t)^2$ удовлетворяват условията $\Phi(0) = 1$ и $\Psi(0) = 1$ (с точка над функцията означаваме диференциране по локалната променлива t), останалите значения на функциите и техните производни във възловата точка са равни на нула. За функциите $\bar{\Phi}(t)$ и $\bar{\Psi}(t)$ са изпълнени съотношенията $\bar{\Phi}(t) = \Phi(1-t)$, $\bar{\Psi}(t) = -\Psi(1-t)$.

Аналогично на всеки подинтервал $[x_i, x_{i+1}] \subset (-l, l)$ решението се търси във вида

$$S(x) = \begin{pmatrix} S_1(x) \\ S_2(x) \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} u_{1,i} \\ u_{2,i} \end{pmatrix} + \Psi(t)h_i \begin{pmatrix} m_{1,i} \\ m_{2,i} \end{pmatrix} + \bar{\Phi}(t) \begin{pmatrix} u_{1,i+1} \\ u_{2,i+1} \end{pmatrix} + \bar{\Psi}(t)h_i \begin{pmatrix} m_{1,i+1} \\ m_{2,i+1} \end{pmatrix}.$$

Точки на колокация се явяват гаусовите възли $t_j = (1 \pm \sqrt{3}/3)/2, j = 1, 2$ в интервала $[0, 1]$. Отчитайки условията за гладкост на търсените функции и

граничните условия, задачата се свежда към решаване на блочно-диагонална система алгебрични уравнения от вида

$$WU = R.$$

Тук U е вектор със стойностите на търсените функции и техните производни във възлите, а матрицата W има следния вид:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1,1} & A_{1,2} & B_{1,1} & B_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{2,1} & A_{2,2} & B_{2,1} & B_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & A_{-1,1} & A_{-1,2} & B_{-1,1} & B_{-1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & A_{-1,2} & A_{-1,2} & B_{-1,2} & B_{-1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_{31,1} & A_{31,2} & A_{42,1} & A_{42,2} & B_{31,1} & B_{31,2} & B_{32,1} & B_{32,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_{31,2} & A_{31,2} & A_{31,2} & A_{32,2} & B_{31,2} & B_{31,2} & B_{32,2} & B_{32,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_{21,1} & A_{21,2} & A_{22,1} & A_{22,2} & B_{21,1} & B_{21,2} & B_{22,1} & B_{22,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_{21,2} & A_{21,2} & A_{22,2} & A_{22,2} & B_{21,2} & B_{21,2} & B_{22,2} & B_{22,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{k,1} & A_{k,2} & B_{k,1} & B_{k,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{k,2} & A_{k,2} & B_{k,2} & B_{k,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{k,1} & A_{k,2} & B_{k,1} & B_{k,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{k,2} & A_{k,2} & B_{k,2} & B_{k,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Елементите на матрицата W се пресмятат по следния начин:

$$A_{i,j1} = -\frac{1}{h_i^2} \Phi_{ij} + \Phi_j c_{ij}$$

$$A_{i,j2} = -\frac{1}{h_i} \Psi_{ij} + \Psi_j h_i c_{ij}$$

$$B_{i,j1} = -\frac{1}{h_i^2} \bar{\Phi}_j + \bar{\Phi}_j c_{ij}$$

$$B_{i,j2} = -\frac{1}{h_i} \bar{\Psi}_{ij} + \bar{\Psi}_j h_i c_{ij}$$

за $i = 1, \dots, r-1$ и $i = k, \dots, n-1$, а $c_{ij} = \cos(\varphi_{ij})$, и съответно

$$A_{ij1,mn} = -\frac{1}{h_i^2} \Phi_j a_{mn} + \Phi_j q_{mn,ij}$$

$$A_{ij2,mn} = -\frac{1}{h_i} \Psi_j a_{mn} + \Psi_j h_i q_{mn,ij}$$

$$B_{ij1,mn} = -\frac{1}{h_i^2} \bar{\Phi}_j a_{mn} + \bar{\Phi}_j q_{mn,ij}$$

$$B_{ij2,mn} = -\frac{1}{h_i} \bar{\Psi}_j a_{mn} + \bar{\Psi}_j h_i q_{mn,ij}$$

за $i = r, \dots, k-1$, $j = 1, 2$. Величините $\{a_{mn}\}$, $m, n = 1, 2$ са елементите на матрицата A , която е постоянна, а $\{q_{mn,ij}\}$ са елементите на Q в съответните гаусови възли.

Броят на блоковете съответства на броя на подинтервалите на мрежата. Броят на стълбовете на всеки блок е фиксиран, а числото на редовете зависи от номера на блока. Във външните интервали $(-L, -l)$ и (l, L) блоковете имат по два реда с изключение на първите и последните. Първият блок на $(-L, -l)$ и последният на (l, L) имат по един допълнителен ред, който отчита граничните условия на дългия субконтакт, а блоковете на границите с късия контакт имат по три допълнителни реда, като два от тях са условията за гладкост на ϕ_1 и един ред е граничното условие за късия субконтакт. Вътрешните блокове в интервала $(-l, l)$ имат по четири реда от дискретизацията на системата ОДУ(2,4).

За решаването на такива системи линейни алгебрични уравнения използваме специализираната подпрограма CWIDTH, която е описана подробно в книгата на де Боор [7]. Тази програма реализира модифицирания за блочно-диагонални матрици (с еднакъв брой стълбове във всеки блок) метод на Гаус с избор на главен елемент.

Използвайки описания алгоритъм, сме създали програма за пресмятане на статични разпределения на магнитния поток в двуслоен джозефсонов контакт с нееднаква дължина на слоевете.

Предстоят изследвания на влиянието на различните дължини на субконтактите върху някои от най-типичните състояния в ДК, както и изследване на тяхната устойчивост при вариране на основните параметри на контакта.

Авторите изказват благодарност на проф. И.В. Пузинин (ОИЯИ, Дубна, Русия) за полезните дискусии.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] S. Sakai, P. Bodin, and N.F. Pedersen, J. Appl. Phys. 73, 2411 (1993)
- [2] M. Machida, S. Sakai, Phys. Rev. B, 70, 144520 (2004).
- [3] М.К. Гавурин, Известия ВУЗ, Математика, т. 5(6), 1958, с. 18.
- [4] Пузынин И.В., Бояджиев Т.Л., Виноцкий С.И., Земляная Е.Ф., Пузынина Т.П., Чулуунбаатар О, О методах вычислительной физики для исследования моделей сложных физических процессов, ЭЧАЯ, 2007, том 38, No 1, стр. 70-116.
- [5] В.А. Треногин, Функциональный анализ, М., Наука, 1980.
- [6] Т.Л. Бояджиев, Сплайн-коллокационная схема повышенного порядка точности, Сообщение ОИЯИ Р2-2002-101, Дубна, 2002.
- [7] К. де Боор, Практическое руководство по сплайнам, М., 1987.